

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2009

Øving 7

Det forventes at du har lest 3.2 og 3.4 i K&C, i tillegg til notatet om ikke-linjære ligninger.

Oppgave 1

a) Anvend Newtons metode på ligningen $f(x) = 0$ der

i) $f(x) = \cos(x) - 1/2$, med $x_0 = 0,5$.

ii) $f(x) = e^x - x - 1$, med $x_0 = 0,5$.

iii) $f(x) = x(1 - \cos(x))$, med $x_0 = 0,5$.

I alle tre tilfellene vil iterasjonene konvergere mot et nullpunkt x^* . Mål konvergensordenen i de tre tilfellene. Er resultatet i overensstemmelse med teorien? Hvis nei, kan du forklare hvorfor?

Vi sier at et nullpunkt x^* av $f(x)$ har multiplisitet m dersom det eksisterer en funksjon $q(x)$ slik at

$$f(x) = (x - x^*)^m q(x), \quad q(x^*) \neq 0,$$

noe som er tilfelle hvis og bare hvis

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

b) Hvilken multiplisitet har løsningene av de tre ligningene i punkt a)?

c) Anta at x^* er et nullpunkt med multiplisitet m av funksjonen $f(x)$. Vis at funksjonen

$$\mu(x) = f(x)/f'(x)$$

har et enkelt nullpunkt i x^* , uavhengig av m . Bruk dette til å finne et iterasjonsskjema som konvergerer kvadratisk mot x^* .

d) Test det nye skjemaet på funksjonene *ii)* og *iii)* i a).

Oppgave 2

Gitt

$$G(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos(x_1 x_2) + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3)} + 1,06 - 0,1 \\ -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi-3}{60} \end{pmatrix}$$

Vis at fikspunktiterasjonene $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ konvergerer mot et unikt fikspunkt for alle startverdier $x^{(0)}$ i $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$.

Verifiser resultatet numerisk.

Oppgave 3

I forelesningen diskuterte vi ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1, \\x_1^3 - x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Denne har to løsninger, en i området $-1 \leq x_1, x_2 \leq 0$ og en i $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Vi viste numerisk at iterasjonsskjemaet basert på formuleringen

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt[3]{x_2}, \\x_2 &= \sqrt{1 - x_1^2}\end{aligned}$$

konvergerer ved valg av passende startverdier.

Forklar hvorfor. Hvordan vil du velge startverdier?

Hint: Det er enklere å analysere resultater hvis du ser to påfølgende iterasjoner under ett.