TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2009

Øving 8

Oppgave 1

Løs det lineære ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 7 \\ 10x_1 + 20x_3 &= 6 \\ 5x_1 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

med

a) Naiv Gauss-eliminasjon.

b) Gauss-eliminasjon med skalert delvis pivotering.

Sett opp LU-faktoriseringen til matrisa i de to tilfellene.

Oppgave 2

Gitt følgende iterasjonsskjema:

$$\begin{aligned} 4x_{k+1} &= -x_k - y_k + z_k + 2 \\ 6y_{k+1} &= 2x_k + y_k - z_k - 1 \\ -4z_{k+1} &= -x_k + y_k - z_k + 4 \end{aligned}$$

Vis at $\mathbf{x}^{(k)} = [x_k, y_k, z_k]^T$ konvergerer mot en grense $\mathbf{x}$ for alle startverdier $\mathbf{x}^{(0)}$ når $k \to \infty$. Finn grensen $\mathbf{x}$.

Hvor mange iterasjoner kreves maksimalt for at $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq 10^{-4}$ hvis $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$? Er grensen realistisk, eller kan du antagelig klare deg med færre iterasjoner?

Oppgave 3

Løs de to ligningssystemene med Gauss–Seidel-iterasjoner:

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5 \\ x + 3y - z &= 3 \\ 3x + y - 5z &= -1 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5 \\ 3x + y - 5z &= -1 \\ x + 3y - z &= 3. \end{aligned} \tag{2}$$

Bruk $[0.1, 0.1, 0.1]^T$ som startvektor. Gjør først et par iterasjoner for hånd, deretter kan du bruke MATLAB-programmet `gs`.

Kommenter resultatene, og se om de stemmer med teorien.

Oppgave 4

Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Ligningen skal løses med en SOR-metode. Oppgaven går ut på å

a) Å finne optimal relaksasjonsparameter ω og tilhørende $\rho(T_\omega)$. Om du vil, bruk MATLAB-funksjonen `rhoSOR`, og plott $\rho(T_\omega)$ som funksjon av ω.

b) Gjøre 10 iterasjoner med dette valget av ω, og for hver iterasjon skrive ut feilen $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_2$. Hint: Skriv om rutinen `gs` slik at den utfører SOR-iterasjoner.

c) Gjenta **b)** med andre valg av ω, for eksempel 1,0 og 1,3. Hvordan er konvergensen sammenlignet med den i **b)**? Stemmer dette med hva vi kan forvente? Bestem også hvilken ω som gir $\rho(T_\omega) = 1$, og iterer med valg av ω rundt denne verdien. Stemmer resultatene med de teoretiske?

Oppgave 5

Hvilke(n) av følgende lineære flerskrittsmetoder er konvergent(e)?

Oppgi også orden p og feilkonstant C_{p+1} for metodene.

a)

$$y_{m+2} + y_{m+1} - 2y_m = \frac{h}{4}\left[f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 8f(x_{m+1}, y_{m+1}) + 3f(x_m, y_m)\right].$$

b)

$$y_{m+3} + \frac{1}{4}y_{m+2} - \frac{1}{2}y_{m+1} - \frac{3}{4}y_m = \frac{h}{8}\left[19f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 5f(x_m, y_m)\right].$$

c)

$$y_{m+2} - y_{m+1} = \frac{h}{3}\left[3f(x_{m+1}, y_{m+1}) - 2f(x_m, y_m)\right].$$