TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2009

Prosjekt 1

Oppgaven går ut på å utvikle, teste og implementere en algoritme for å løse 2-punkts randverdiproblemer på formen

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x), \qquad x \in [a,b], \qquad u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \tag{1}$$

numerisk.

Den numeriske algoritmen lages som følger:

1. Velg $n+1$ distinkte noder i $[a,b]$ med $x_0 = a$ og $x_n = b$.
2. Finn et polynom $v \in \mathbb{P}_n$ som tilfredsstiller randbetingelsene i tillegg til differensialligningen i alle indre noder. Det betyr at v skal tilfredsstille

$$v(a) = u_a, \qquad v(b) = u_b \tag{2a}$$

$$v''(x_i) + p(x_i)v'(x_i) + q(x_i)v(x_i) = r(x_i), \qquad i = 1,\dots,n-1. \tag{2b}$$

Dermed kan vi bruke $v(x)$ som en numerisk approksimasjon til løsningen $u(x)$ av (1). Polynomet $v(x)$ kan skrives på Lagrange-form, dvs.

$$v(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k \ell_k(x), \qquad \ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Det betyr at polynomet $v(x)$ er bestemt av v_i, $i = 0,\dots,n$, som igjen er gitt av betingelsene (2).

Oppgave 0

Denne deloppgaven er ment som en introduksjon til problemstillingen. Dere bør gjøre den, men den skal ikke *leveres inn.*

Gitt ligningen

$$u'' + u = 2\cos(x), \qquad u(0) = 0,\ u(\pi/2) = \pi/2,$$

med eksakt løsning $u = x\sin(x)$.

a) Velg nodene $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$ og $x_2 = \pi/2$, og finn polynomet $v(x)$ etter oppskriften over. Sammenlign v og den eksakte løsningen u (lag et plott).

b) Legg til nodene $x_3 = \pi/8$ og $x_4 = 3\pi/8$, og gjenta eksperimentet.

Oppgave 1

Betingelsen (2b) krever at det er mulig å regne ut den deriverte av polynomet $v(x)$ i nodene. Mer generelt kan vi skrive dette som:

- La $p \in \mathbb{P}_n$ være gitt ved $p(x_i) = v_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- La $w_i = p'(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dette er en lineær operasjon som kan skrives på formen

$$w = D_n v$$

der $D_n \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $v = [v_0, \ldots, v_n]^T$, og $w = [w_0, \ldots, w_n]^T$.

a) Finn D_2 fra nodene $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$ og $x_2 = \pi/2$.

b) Gitt en vilkårlig følge av diskrete noder $(x_i)_{i=0}^n$. Vis at D_n er gitt ved

$$D_{ik} = \begin{cases} \dfrac{a_i}{a_k(x_i - x_k)} & \text{når } i \neq k \\ \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_j} & \text{for } i = k, \end{cases}$$

der $a_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_j - x_k)$.

c) Skriv en MATLAB-funksjon som regner ut differensieringsmatrisa D_n for et gitt sett av noder x.

d) La nå p interpolere en gitt funksjon $f(x)$ i nodene $(x_i)_{i=0}^n$. I så fall kan vi bruke $w_i = p'(x_i) \approx f'(x_i)$ som en approksimasjon til den deriverte i noden. Test dette på funksjonene

$$\begin{aligned} &i) && f(x) = e^x \sin(5x) \\ &ii) && f(x) = 1/(1 + x^2) \\ &iii) && f(x) = |x^3| \\ &iv) && f(x) = x^{10} \end{aligned}$$

på intervallet $x \in [-1, 1]$ med noder gitt ved

$$x_i = -\cos(i\pi/n), \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

Finn feilen $E_n = \max_{i=0,\ldots,n} |f'(x_i) - w_i|$ numerisk og plott denne som funksjon av n, $n = 1, \ldots, 50$. Kommenter svaret.

e) La $\bar{w}_i = p''(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Overbevis deg selv om at disse koeffisientene er gitt ved

$$\bar{w} = D_n^2 v.$$

```
% Define the equation:
p = ...
q = ...
r = ...

% Boundary conditions
a = ...
b = ...
ua = ...
ub = ...

% Number of nodes - 1
n = ...

  :
  :

% Plot the solution.
```

Figur 1: Eksempel på MATLAB-kode i oppgave 2.

Oppgave 2

a) Vis at betingelsene (2) danner et lineært ligningssystem

$$Mv = b.$$

Forklar hvordan M kan uttrykkes ved hjelp av differensieringsmatrisa D_n i oppgave 1.

b) Skriv et MATLAB-skript som løser et vilkårlig to-punkts randverdiproblem (1) numerisk ved hjelp av (2). Bruk fordelingen av nodene gitt ved (3), flytt dem eventuelt over på intervallet $[a, b]$. Skriptet skal ha et oppsett som vist i figur 1.

Test først programmet på problemet i oppgave 0. Velg $n = 10$ og $n = 20$ og plott både løsningen og feilen.

Bruk deretter programmet til å løse følgende ligninger:

$$\begin{aligned} &i) && u'' + 10u' + u = 1, && u(-1) = u(1) = 0. \\ &ii) && u'' - \frac{2x}{x^2+1}u' + \frac{2}{x^2+1}u = x^2 + 1, && u(0) = 2,\ u(1) = 5/3. \end{aligned}$$

Velg gjerne flere ligninger selv.