**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

Lørdag 20. desember 2003
Tid: 09:00–14:00, Sensur: 20.01.2004

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 En partikkel beveger seg i planet, og dens posisjon ved tid t er $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Partikkelen er utsatt for et kraftfelt, og følgende differensialligninger gjelder for partikkelens x- og y-koordinat.

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \text{der } \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \text{etc} \tag{1}$$

a) Definer hastigheten $\mathbf{v} = (u, v)$ ved $u = \dot{x}$, og $v = \dot{y}$, og skriv om (1) til et system av 4 differensialligninger i de ukjente (x, y, u, v).

Svar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

b) Anta at ved tid $t = 0$ har vi $x(0) = 1, y(0) = 0, u(0) = 0, v(0) = 1$, og utfør ett skritt med Eulers metode der du bruker skrittlengde $h = 0.2$.

Svar: Eulers metode er $U_{i+1} = U_i + hF(U_i)$, setter vi inn verdier $h = 0.2, U_0 = [1, 0, 0, 1]^T$ får vi

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{(1^2+0^2)^{3/2}} \\ -\frac{0}{(1^2+0^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Ta ett skritt med Forbedret Eulers metode ("*Modified Euler Method*" på side 276 i B&F) der du bruker samme startverdier og skrittlengde som i forrige delspørsmål.

Svar: Kan bruke delsvar fra forrige deloppgave, og setter $\tilde{U}_1 = U_0 + h/2\,(F(U_0) + F(U_1))$ og dermed

$$\tilde{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.2/2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ -\frac{1}{(1^2+(0.2)^2)^{3/2}} \\ -\frac{0.2}{(1^2+(0.2)^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.2 \\ -0.1942866034 \\ 0.9811426793 \end{bmatrix}$$

d) Bruk svarene ovenfor til å lage et estimat for den lokale avbruddsfeilen, $\tau_1(h)$ i Eulers metode. Bruk maksimumsnorm på $\mathbb{R}^4$ til også å angi $\|\tau_1(h)\|_\infty$.

Svar: Fra B&F side 284 finner vi $\tau_1(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{U}_1 - U_1)$ og vi får

$$\tau_1(h) \approx \begin{bmatrix} -.1 \\ 0 \\ .0286 \\ -.0943 \end{bmatrix}$$

slik at $\|\tau_1(h)\|_\infty \approx 0.1$.

e) Estimer hvor stor skrittlengde en måtte brukt i situasjonen med Eulers metode ovenfor dersom den lokale avbruddsfeilen skulle vært 10^{-2} i maksimumsnorm.

Svar: Vi trenger nå bare å bruke estimatet fra boka med kapittel 5.5 med $n = 1$, så vi får estimert skrittlengde

$$h_{\text{ny}} \approx h \cdot \frac{\varepsilon}{\|\tau_1(h)\|_\infty}$$

der $\varepsilon = 10^{-2}$. Setter vi inn estimatet $0.1 \approx \|\tau_1(h)\|_\infty$ får vi

$$h_{\text{ny}} \approx 0.2\frac{10^{-2}}{0.1} = 0.02.$$

Den eksakte løsningen av differensialligningene (1) har flere bevarte størrelser. En av disse er *spinnet* $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ hvis koordinat kan skrives som

$$M(x, y, u, v) = xv - yu$$

Det er altså slik at for en løsning $(x(t), y(t), u(t), v(t))$ av (1), så vil $M(x(t), y(t), u(t), v(t))$ være konstant for alle t. Det er interessant å vite i hvilken grad den numeriske metoden også bevarer denne størrelsen. Definerer vi $M_i = M(x_i, y_i, u_i, v_i)$, der (x_i, y_i, u_i, v_i) resulterer fra den numeriske metoden, burde vi ideelt hatt at $M_i = \text{konst} = M_0$ for alle i.

f) Vis at med Eulers metode og startverdi (x_i, y_i, u_i, v_i) vil

$$M_{i+1} = M_i \left(1 + \frac{h^2}{r_i^3}\right)$$

der $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Hva betyr dette for Eulers metodes evne til å bevare spinnet over mange skritt?

Svar: For Eulers metode gjelder $x_{i+1} = x_i + hu_i$ $y_{i+1} = y_i + hv_i$, $u_{i+1} = u_i - h\frac{x_i}{r_i^3}$, $v_{i+1} = v_i - h\frac{y_i}{r_i^3}$, så vi beregner

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= x_{i+1}v_{i+1} - y_{i+1}u_{i+1} = (x_i + hu_i)(v_i - h\frac{y_i}{r_i^3}) - (y_i + hv_i)(u_i - h\frac{x_i}{r_i^3}) \\ &= x_iv_i - y_iu_i + h(u_iv_i - \frac{x_iy_i}{r_i^3} - v_iu_i + \frac{y_ix_i}{r_i^3}) + h^2(-\frac{u_iy_i}{r_i^3} + \frac{v_ix_i}{r_i^3}) = M_i(1 + \frac{h^2}{r_i^3}) \end{aligned}$$

Spesielt betyr dette at Eulers metode ikke bevarer spinnet eksakt, men at dette øker monotont. Tar man mange nok skritt for en gitt skrittlengde vil spinnet bli vilkårlig stort.

Symplektisk Eulers metode brukes gjerne på såkalte partisjonerte systemer av diffligninger, dvs systemer der en kan splitte den ukjente vektoren $\mathbf{y}$ opp i to deler $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ på en slik måte at diffligningene får formen

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{p}), \qquad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

Symplektisk Eulers metode kan da formuleres ved

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\mathbf{f}(\mathbf{p}_i), \quad \mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + h\mathbf{g}(\mathbf{q}_{i+1}),$$

g) Skriv ned Symplektisk Eulers metode for (1). Er metoden eksplisitt eller implisitt? Bestem metodens evne til å bevare spinnet M.

Svar: For den gitte ligningen vår, kan vi formulere Symplektisk Eulers metode som

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + hu_i \\ y_i + hv_i \\ u_i - h\frac{x_{i+1}}{r_{i+1}^3} \\ v_i - h\frac{y_{i+1}}{r_{i+1}^3} \end{bmatrix}$$

Spørsmålet om eksplisitt/implisitt er et lurespørsmål. For slik metoden er formulert ovenfor er den implisitt, men vi kan sette inn uttrykkene for x_{i+1}, y_{i+1} fra de to første ligningene i de to siste, og dermed blir metoden av eksplisitt format

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + hu_i \\ y_i + hv_i \\ u_i - h\frac{x_i + hu_i}{r_{i+1}^3} \\ v_i - h\frac{y_i + hv_i}{r_{i+1}^3} \end{bmatrix}$$

For å sjekke bevaring av spinn beregner vi

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= x_{i+1}v_{i+1} - y_{i+1}u_{i+1} = (x_i + hu_i)(v_i - h\frac{y_i + hv_i}{r_{i+1}^3}) - (y_i + hv_i)(u_i - h\frac{x_i + hu_i}{r_{i+1}^3}) \\ &= x_iv_i - y_iu_i + d_1 \cdot h + d_2 \cdot h^2 + d_3h^3 \end{aligned}$$

Her finner vi at $d_1 = 0$ fordi en får akkurat de samme leddene som i Eulers metode ovenfor. Vi finner videre

$$d_2 r_{i+1}^3 = u_i y_i - x_i v_i + v_i x_i - y_i u_i = 0, \quad d_3 r_{i+1}^3 = -u_i v_i + v_i u_i = 0$$

Vi konkluderer med at $M_{i+1} = x_i v_i - y_i u_i = M_i$.

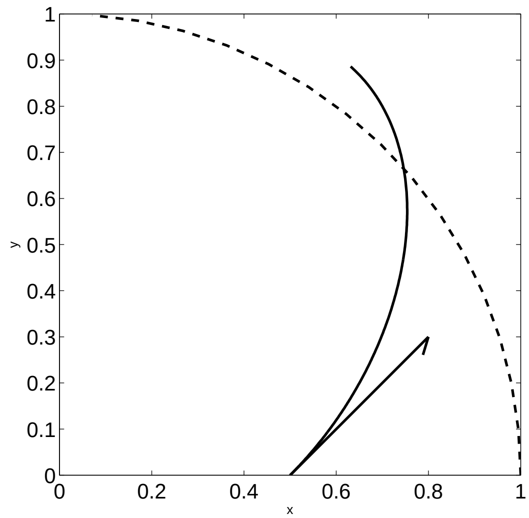
Så Symplektisk Eulers metode bevarer spinnet eksakt, dette gjør at denne metoden fungerer bra over veldig lange tidsintervaller.

Oppgave 2

Vi studerer fremdeles partikkelen fra Oppgave 1. Vi ser nå spesifikt på en situasjon der partikkelen starter innenfor en sirkel sentrert i origo med radius 1, og skytes på skrå utover. Vi er interessert i hvor lang tid det tar før den krysser sirkelbuen, vi kaller dette tidspunktet for t^*. Ved å innføre dobbelt sett med polarkoordinater,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ u = \rho\cos\phi,\ v = \rho\sin\phi$$

kan man vise at radiuskoordinaten $r = r(t)$ vil oppfylle diffligningen



$$\dot{r}^2 = \frac{2}{r} + \alpha - \frac{M_0^2}{r^2} \tag{2}$$

der $\alpha = \rho(0)^2 - 2/r(0)$, $M_0 = M(x(0), y(0), u(0), v(0))$ og M er spinnet fra Oppgave 1.

Anta i alle deloppgavene nedenfor at startpunktet er $(0.5, 0.0, 1.1, 1.1)$ dvs $r(0) = 0.5$ og $\rho(0) = \sqrt{1.1^2 + 1.1^2} \approx 1.5556$.

a) Vis hvordan man fra dette kan sette opp et integral for t^*, tiden det tar inntil partikkelen krysser sirkelen med radius 1 (sentrert i origo), og estimer denne tiden ved Rombergintegrasjon. Avbryt iterasjonen når $|R_{n,n} - R_{n-1,n-1}| < 0.02$ i ekstrapolasjonstabellen.

Svar: Integralet som skal løses er

$$\int_{0.5}^{1} \frac{r\,dr}{\sqrt{\alpha r^2 + 2r - M_0^2}}, \quad \alpha = -1.58,\ M_0^2 = 0.3025.$$

Rombergtabell ser ut som følger

.9565976847				
.8157397954	.7687871661			
.7680889759	.7522053699	.7510999169		
.7539570930	.7492464654	.7490492051	.7490166541	
.7501518134	.7488833870	.7488591818	.7488561656	.7488555362

En beregner differanser $e_n = |R_{n+1,n+1} - R_{n,n}|$ og finner da $e_1 = .1878105186, e_2 = -.0176872492, e_3 =$ $.0020832628, .0001611179$, så iflg oppgaven er det nok å sette $T \approx .7510999169 (\approx 0.75)$.

b) Anta nå at vi har løst (2) med en nøyaktig diffligningsløser, og kommet fram til følgende verdier

t	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
r	0.83456	0.89195	0.94102	0.98242	1.0166	1.0440	1.0649	1.0795	1.0879

Approksimer nå t^* ved interpolasjon, der du tar med et passende utvalg av datapunkter slik at et estimat av feilen blir mindre enn 0.001.

Hint. Det kan lønne seg å la r-verdiene være abscisser istedetfor ordinater.

Svar: Vi lar r-verdiene være abscisser og sorterer dem i økende avstand fra $r = 1$ som er ønsket evalueringspunkt. Deretter kan vi bruke Nevilles algoritme (B&F side 118), og beregne følgende tabell (med 5 tellende siffer)

r_i	t_i				est
1.0166	0.8				
0.98242	0.7	0.75140			0.0486
1.0440	0.9	0.75707	0.74795		0.00344
0.94102	0.6	0.77175	0.75083	0.74859	0.000633

Feilestmatet er det vanlige, differanser mellom to etterfølgende diagonalelementer i tabellen. Svarene i tabellen ovenfor er funnet ved å regne med flere siffer enn det som er oppgitt, hvert oppgitte tall er avrundet til 5 signifikante siffer.

c) Anta nå at man bruker lineær ekstrapolasjon for tiden t med de to datapunktene (t_1, r_1) og (t_2, r_2) for å estimere t^*, vi kaller den ekstrapolerte verdien for $\bar{t}$. Vi skal også forutsette at $r(0) = 0.5 < r_1 < r_2 < 1$, og at disse punktene ligger på den eksakte løsningen $r(t)$ av (2), dvs $r_1 = r(t_1)$ og $r_2 = r(t_2)$. Vis at ekstrapolasjonsfeilen oppfyller

$$|\bar{t} - t^*| \leq 8.7 \cdot (1 - r_1)(1 - r_2)$$

Hint: La oss kalle løsningen av diffligningen (2) for $R(t)$. Det kan vises at $R(t)$ har en invers $T(r)$ slik at $R(T(r)) = r$ for det ønskede intervallet $0.5 \leq r \leq 1$. Du kan anta dette uten bevis, samt at $T''(r)$ (andrederivert) er positiv og monotont voksende i dette intervallet.

Svar: Vi bruker standard formel for feil i lineær inter(ekstra)polasjon dvs

$$|\bar{t} - t^*| \leq \frac{1}{2}(1 - r)(1 - r_2) \max_{0.5 \leq r \leq 1} |T''(r)|$$

Problemet blir å estimere $T''(r)$. Men siden det er oppgitt at den er positiv og monotont voksende får vi $\max\limits_{0.5 \leq r \leq 1} |T''(r)| \leq T''(1)$. Fra diffligningen finner vi at

$$T'(r) = \frac{r}{\sqrt{\alpha r^2 + 2r - M_0^2}} \quad \Rightarrow \quad T''(r) = \frac{r - M_0^2}{(\alpha r^2 + 2r - M_0^2)^{3/2}}$$

Setter vi inn $\alpha = -1.58, M_0^2 = 0.3025$ og $r = 1$ får vi $T''(1) \approx 17.317$ som vi nå setter inn i feilskranken ovenfor.