Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

Lørdag 04. desember 2004
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 05.01.2005

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Hvis et stivlegeme roterer uten påvirkning av ytre krefter vil hver koordinat av legemets vinkelhastighet være periodisk med periode $4K$ der K er gitt ved integralet

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} \tag{1}$$

og der m er en størrelse som avhenger av legemets spinn, energi og treghetsmoment.

a) En medstudent har beregnet approksimasjoner til $K(0.9)$ ved hjelp av midtpunktmetoden med n intervaller for forskjellige verdier av n som i tabellen

n	1	2	4	8	16
U_n	2.118061	2.474199	2.572352	2.578070	2.578092

Beregn sammensatt trapes med $n = 32$ delintervaller og estimer feilen $|K(0.9) - T_{32}|$ (uten å analysere integranden i (1)).

Svar: Vi beregner

$$T_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-0.9\sin^2\frac{\pi}{2}}}\right) = \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{10}) = 3.269045$$

Deretter er det bare å bruke tabellen,

$$\begin{aligned}
T_2 &= \tfrac{1}{2}(U_1 + T_1) &&= 2.693553\\
T_4 &= \tfrac{1}{2}(U_2 + T_2) &&= 2.583876\\
T_8 &= \tfrac{1}{2}(U_4 + T_4) &&= 2.578114\\
T_{16} &= \tfrac{1}{2}(U_8 + T_8) &&= 2.578092\\
T_{32} &= \tfrac{1}{2}(U_{16} + T_{16}) &&= 2.578092
\end{aligned}$$

Som feilestimat forsøker vi $|T_{16} - U_{16}|/4 = 0$ og konkluderer med at vi har funnet integralet med minst 6 siffers nøyaktighet.

b) Bruk Rombergintegrasjon til å beregne en approksimasjon til $K(0.9)$ med feil mindre enn $5 \cdot 10^{-4}$. Kommenter resultatet i forhold til hva du fikk i **a)**.

Svar: Rombergtabellen blir

3.269045				
2.693553	2.501723			
2.583876	2.547317	2.550357		
2.578113	2.576193	2.578118	2.578558	
2.578092	2.578084	2.578211	2.578212	2.578211

Differansen mellom de to siste diagonalelementer har absoluttverdi $3.4794 \cdot 10^{-4}$. Vi får ganske dårlig nøyaktighet i ekstrapolasjonen. Grunnen til dette er at trapesregelen virker bedre enn vanlig i dette tilfellet fordi alle odde deriverte av integranden er like (0) i endepunktene, Euler-Maclaurins formel forklarer da den gode oppførselen.

c) I en bok finner vi følgende tabell for $K(m)$

m	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$K(m)$	1.570796	1.612441	1.659623	1.713889	1.777519	1.854074	1.949567

Du skal estimere $K(0.32)$ ved interpolasjon. Bruk Nevilles algoritme med et minst mulig utvalg av datapunkter fra tabellen ovenfor slik at estimert feil i interpolasjonen blir mindre enn 10^{-3}.

Svar: Her er det viktig å huske at datapunktene må sorteres med abscisser i økende avstand fra beregningspunktet $m = 0.32$. Vi lager tabell i Neville, og bruker differans mellom suksessive diagonalelementer som feilestimat.

0.3	1.7139		
0.4	1.7775	1.7266	
0.2	1.6596	1.7304	1.7259

Vi konkluderer med at $K(0.32) = 1.726 \pm 0.001$.

d) En av koordinatfunksjonene nevnt ovenfor er relatert til den Jacobi-elliptiske funksjonen $\mathrm{sn}(u, m)$ som altså er periodisk i variablen u med periode $4K(m)$. Det viser seg også at $\mathrm{sn}(u, m) = -\mathrm{sn}(-u, m)$, noe som gjør det naturlig å approksimere den med en funksjon av typen

$$S(u, m) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(m) \cdot \sin\left(\frac{2\pi\ell u}{4K(m)}\right).$$

Sett $m = 0.5$, $n = 3$, og bestem $S(u, 0.5)$ som minimerer kvadratsummen

$$E = \sum_{r=0}^{7} (\mathrm{sn}(u_r, 0.5) - S(u_r, 0.5))^2, \quad u_r = \frac{1}{2} K(0.5)\, r,$$

Hint. Det oppgis at

$$f_\ell = \sum_{r=0}^{7} \mathrm{sn}(u_r, 0.5) \cdot \sin\left(\frac{2\pi\ell}{4K(0.5)}\, u_r\right),$$

ℓ	1	2	3
f_ℓ	4.164784	0.0	0.164784

Svar: Normalligningene for basisfunksjoner ϕ_ℓ er (vi skriver kun b_ℓ for $b_\ell(0.5)$)

$$\sum_{\ell=1}^{3} b_\ell \sum_{r=0}^{7} \phi_\ell(u_r)\phi_j(u_r) = \sum_{r=0}^{7} \mathrm{sn}(u_r, 0.5)\phi_j(u_r) = f_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Men med våre basisfunksjoner $\phi_\ell(u) = \sin\left(\frac{2\pi\ell u}{4K(m)}\right)$, blir den innerste summen på venstre side lik 4 for $\ell = j$ og 0 når $\ell \neq j$. Derfor finner vi rett og slett at $b_\ell = f_\ell/4$, og

$$S(u, 0.5) = 1.0412 \cdot \sin\left(\frac{2\pi u}{4K(0.5)}\right) + 0.0412 \cdot \sin\left(\frac{6\pi u}{4K(0.5)}\right)$$

Merk også at $K(0.5) = 1.854074$ er gitt i tabellen ovenfor.

Oppgave 2

a) Finn et andregradspolynom $p_\alpha(x)$ slik at

$$p_\alpha(x_0) = y_0, \quad p'_\alpha(x_0) = f_0, \quad p'_\alpha(x_0 + \alpha h) = f_\alpha$$

der $y_0, f_0, f_\alpha, \alpha > 0$ og $h > 0$ er gitte tall.

Svar: Vi finner ved lineær interpolasjon at

$$p'(x_0 + \theta h) = \frac{\alpha - \theta}{\alpha}\, f_0 + \frac{\theta}{\alpha} f_\alpha.$$

Så

$$p_\alpha(x_0 + \theta h) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p'_\alpha(x)\, dx = y_0 + h \int_0^\theta \left(\frac{\alpha - s}{\alpha}\, f_0 + \frac{s}{\alpha}\, f_\alpha\right) ds = y_0 + h\theta f_0 + \frac{h\theta^2}{2\alpha}(f_\alpha - f_0)$$

b) Vi skal nå konstruere en metode for å løse diffligningen

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0$$

Vi vil approksimere løsningen lokalt med et polynom $p(x_0 + \theta h)$ som oppfyller

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0) = f(y_0), \quad p'(x_0 + \alpha h) = f(p(x_0 + \alpha h)),$$

for en gitt positiv verdi av α. Deretter setter vi $y_1 := p(x_0 + h)$. Vis at en slik metode er ekvivalent med en implisitt Runge-Kutta-metode, og angi Butcher-tabellen for denne. Finn ut om det eksisterer en α slik at metoden har orden 3.

Svar: Vi kan bruke polynomet fra **a.** med $f_0 = f(y_0)$ og $f_\alpha = f(p(x_0 + \alpha h))$. Dermed blir

$$y_1 = p(x_0 + h) = y_0 + hf_0 + \frac{h}{2\alpha}(f_\alpha - f_0)$$

Vi setter $k_1 := f_0 = f(y_0)$ og

$$k_2 := f_\alpha = f(p(x_0 + \alpha h)) = f(y_0 + \alpha h k_1 + \frac{h\alpha}{2}(k_2 - k_1)) = f(y_0 + \frac{h\alpha}{2}(k_1 + k_2))$$

Dermed blir hele metoden en Runge-Kutta metode med Butcher tabell

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

Ordensbetingelsene $b_1 + b_2 = 1$ og $b_1c_1 + b_2c_2 = \frac{1}{2}$ er oppfylt for alle α så metoden har minst orden 2. Vi finner $b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \frac{\alpha}{2}$ og $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = b_2 a_{22} c_2 = \frac{\alpha}{4}$. Disse skal være hhv $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{6}$ og dermed blir begge oppfylt hvis $\alpha = \frac{2}{3}$.

Oppgave 3 Konstruer den naturlige kubiske splinen $B(x)$ med skjøter $0, 1, 2, 3, 4$ som oppfyller

$$B(0) = 0, \qquad B(1) = \frac{1}{6}, \qquad B(2) = \frac{2}{3}, \qquad B(3) = \frac{1}{6}, \qquad B(4) = 0.$$

Svar: Her kan man benytte symmetrien i dataene for å få færre beregninger, men la oss gjøre det akkurat slik det står beskrevet i boka. Sett

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \; x_j \le x \le x_{j+1}$$

Vi har her $n = 4$ finner altså først koeffisientene c_1, c_2, c_3 (mens $c_0 = c_4 = 0$) fra det tridiagonale systemet (husk alle $h_i = 1$) nedenfor der høyresiden der funnet ved $(hs)_k = 3(a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1})$, og $a_k = B(x_k)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Formelen $d_j = (c_{j+1} - c_j)/3$ gir

$$d_0 = \frac{1}{6}, \quad d_1 = -\frac{1}{2}, \quad d_2 = \frac{1}{2}, \quad d_3 = -\frac{1}{6}.$$

Til slutt bruker vi $b_j = (a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1})$ og finner

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{1}{2}$$

Splinen blir dermed

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3, & 1 \le x \le 2, \\ \frac{2}{3} - (x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^3, & 2 \le x \le 3, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{6}(x-3)^3, & 3 \le x \le 4. \end{cases}$$