Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

august 2005
Tid: 09:00–13:00, Sensur: xx.xx.2005

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Bestem verdiene av a og b som gjør funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 + a(x-1) + b & x \in (1,3] \end{cases}$$

til en kvadratisk splinefunksjon på intervallet $[0,3]$.

Svar: $a = 2, b = 1$

Oppgave 2

a) Funksjonen $f(x)$ er gitt i følgende punkter

x	-1	-0.5	0.0	0.5	1
$f(x)$	1.0000	0.1667	0.0000	0.1000	0.3333

Bestem tabellen over foroverdifferenser, og sett opp interpolasjonspolynomet.

Svar:

$$\begin{array}{ccccc}
1.0000 & & & & \\
 & -0.8333 & & & \\
0.1667 & & 0.6667 & & \\
 & -0.1667 & & -0.4000 & \\
0.0000 & & 0.2667 & & 0.2667 \\
 & 0.1000 & & -0.1333 & \\
0.1000 & & 0.1333 & & \\
 & 0.2333 & & & \\
0.3333 & & & &
\end{array}$$

Skrevet med brøker fås: $p(-1+s/2) = 1 - \frac{41}{30}s + \frac{59}{90}s^2 - \frac{2}{15}s^3 + \frac{1}{90}s^4$

b) La oss se på interpolasjonsfeilen for funksjonen $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$ på intervallet $[-1,1]$ når man bruker $n+1$ abscisser $x_0, \ldots, x_n$ som er nullpunkter i Chebyshevpolynomet $T_{n+1}(x)$. Finn en skranke for maksimum av interpolasjonsfeilen over intervallet $[-1,1]$ uttrykt ved n, når $n \geq 1$

Hint: Det er enkelt å finne $f^{(m)}(x)$ for $m \geq 2$ om en observerer at

$$f''(x) = \frac{8}{(2+x)^3} = 4 \cdot \frac{2!}{(2+x)^3}$$

Svar: En kan bruke standardresultatet

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{(n+1)!}\|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\|_\infty = \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{(n+1)!}\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty$$

der vi bruker at datapolynomet er lik det skalerte Chebyshevpolynomet $\tilde{T}_{n+1}(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$ slik at $\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}$. Fra hintet finner vi dessuten at

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m \cdot 4 \cdot \frac{m!}{(2+x)^{m+1}}, \quad m \geq 2.$$

Det er åpenbart at denne tar sin maksimale tallverdi i $x = -1$, så vi får

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty = 4 \cdot (n+1)!$$

Så oppsummert får vi: $\|f - p_n\|_\infty \leq 2^{2-n}$

Oppgave 3 En Runge-Kutta metode har Butchertabell gitt ved

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 1-\alpha & \alpha & \\ \hline & \beta & 1-2\beta & \beta \end{array} \tag{1}$$

der α og β er parametre som må bestemmes.

a) Vis at metoden generelt har orden 2, og finn eventuelle verdier av α og β slik at metoden har orden 3.

Svar: Vi sjekker ordensbetingelser

$$\begin{array}{ll} p=1: & \beta + (1-2\beta) + \beta = 1 \\ p=2: & \beta \cdot 0 + (1-2\beta)\cdot \frac{1}{2} + \beta \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ p=3: & \beta \cdot 0 + (1-2\beta)\cdot \frac{1}{4} + \beta \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3} \\ & b_3 a_{32} c_2 = \beta\alpha\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{array}$$

så for $p=1$ og $p=2$ er betingelsene alltid oppfylt. For orden 3 ser vi at en må ha $\beta = \frac{1}{6}$ og $\alpha = 2$.

b) Finn stabilitetspolynomet til metoden som funksjon av α og β.

Svar: Vi anvender metoden på $y' = \lambda y$ og setter $z = h\lambda$

$$\begin{aligned}
hk_1 &= hf(y_0) = zy_0 \\
hk_2 &= hf(y_0 + hk_1/2) = z(1 + z/2)y_0 \\
hk_3 &= hf(y_0 + (1-\alpha)hk_1 + \alpha hk_2) = z(1 + (1-\alpha)z + \alpha z(1 + z/2))y_0 \\
&= (\tfrac{\alpha}{2}z^3 + z^2 + z)y_0 \\
y_1 &= y_0 + \beta(hk_1 + hk_3) + (1 - 2\beta)hk_2 \\
&= (1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}\alpha\beta z^3)y_0
\end{aligned}$$

så stabilitetspolynomet er $p(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta z^3$.

c) For resten av oppgaven bruker vi metoden (1) med $\beta = -\frac{1}{10}$ og $\alpha = -4$. Vi vil gjerne prøve ut denne metoden på et spesifikt problem og velger initialverdiproblemet

$$y' = \mu y^2, \qquad \mu < 0, \quad y(0) = y_0 \tag{2}$$

der μ er en parameter. Utfør ett skritt med metoden der du bruker skrittlengde $h = 0.1$, $\mu = -1$ og $y_0 = 1$.

Svar:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(y_0) = -1 \\
k_2 &= f(y_0 + hk_1/2) = -0.9025 \\
k_3 &= f(y0 + 5\,hk_1 - 4\,hk_2) = -0.74132 \\
y_1 &= y_0 + h/10(-k_1 + 12k_2 - k_3) = 0.90911
\end{aligned}$$

d) En student har gjort omfattende tester med metoden på initialverdiproblemet (2) og finner til sin store forundring at den oppfører seg som en fjerde ordens metode på dette problemet uansett verdi av μ og y_0. Gjør en analyse som forklarer denne oppførselen.

Svar: Det fins ulike måter å angripe dette på. En grei teknikk er først å observere at eksakt løsning av diffligningen er

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - \mu y_0 x} \quad \Rightarrow \quad y(h) = \frac{y_0}{1-w} = (1 + w + w^2 + \cdots)y_0, \quad w = \mu h y_0$$

Deretter anvender man metoden og finner

$$\begin{aligned}
hk_1 &= h\mu y_0^2 = wy_0 \\
hk_2 &= h\mu(y_0 + hk_1/2)^2 = w(1 + w/2)^2 y_0 \\
hk_3 &= h\mu(y_0 + 5hk_1 - 4hk_2)^2 = w(1 + 5w - 4w(1 + w/2)^2)^2\, y_0 = \\
&\, w(-1 - w + 4w^2 + w^3)^2\, y_0 = (w + 2w^2 - 7w^3 - 10w^4 + \mathcal{O}(w^5))y_0 \\
y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{10}h(-k_1 + 12k_2 - k_3) = (1 - \tfrac{1}{10}w + \tfrac{6}{5}w(1 + w/2)^2 - \tfrac{1}{10}(w + 2w^2 - 7w^3 - 10w^4))y_0 + \mathcal{O}(w^5) \\
&= (1 + w + w^2 + w^3 + w^4)y_0 + \mathcal{O}(\sqsupseteq^\triangledown)
\end{aligned}$$

Vi husker at $w = \mu h y_0$ slik at restleddet blir $\mathcal{O}(h^5)$. Sammenligner vi numerisk og eksakt løsning ser vi at $y_1 - y(h) = \mathcal{O}(h^5)$ som betyr at metoden har orden 4 på dette problemet.