Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

Lørdag 10. desember 2005
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 05.01.2005

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Bestem

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

med minst 4 signifikante siffer (se oppgitte formler)

Svar: Bruk de oppgitte formler. Vi kan bruke Gauss-Chebyshev kvadratur med $f(x) = e^x$, så $f^{(k)}(x) = e^x$ for alle k og finner da at $|f^{(2n)}(\xi)| \le e$ for alle k. Dermed kan vi sette opp en tabell over feilen for hver n.

n	1	2	3	4	5	6	7
feil	2.13	0.04	$0.37 \cdot 10^{-3}$	$0.16 \cdot 10^{-5}$	$0.45 \cdot 10^{-8}$	$0.87 \cdot 10^{-11}$	$0.11 \cdot 10^{-13}$

Det holder altså med Q_4. Vi får $Q_4(f) = 3.9775$.

$$Q_4(f) = \frac{\pi}{4}\left(\exp(-\cos(\frac{\pi}{8})) + \exp(-\cos(\frac{3\pi}{8})) + \exp(\cos(\frac{3\pi}{8})) + \exp(\cos(\frac{\pi}{8}))\right)$$

Oppgave 2 Van der Pol oscillatoren kan beskrives ved startverdiproblemet

$$u'' + \alpha(u^2 - 1)\, u' + u = 0, \qquad u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0 \tag{1}$$

Metoden *baklengs Euler* (reluE) for problemet $y' = f(y)$ har formen

$$y_{m+1} = y_m + h\, f(y_{m+1}) \tag{2}$$

der h er skrittlengden.

a) Vis at (2) anvendt på (1) leder til at en i første skritt kan finne $u_1 \approx u(h)$ ved å løse ligningen

$$\alpha h\, u^3 - \alpha h u_0\, u^2 + (1 - \alpha h + h^2)\, u - u_0(1 - h\alpha) - h v_0 = 0 \qquad (3)$$

med hensyn på u.

Svar: Her må man først skrive om til system av første ordens ligninger, $u' = v$ og $v' = -\alpha(u^2 - 1)v - u$. Skriver vi v for v_1 og u for u_1 fås

$$u = u_0 + hv, \qquad v = v_0 - \alpha\, h\, (u^2 - 1)\, v - h\, u$$

Vi setter inn $v = (u - u_0)/h$ i den andre av disse ligningene for å komme til det oppgitte svaret.

b) Sett nå $\alpha = 5$, $h = 0.1$, $u_0 = 2$, $v_0 = 0$, og finn u_1 med minst 6 korrekte desimaler.

Svar: Newton's metode med startverdi $u^{(0)} = u_0 = 2$ er det greieste her. Vi begynner med å sette inn $\alpha = 5$, $u_0 = 2$, $v_0 = 0$, og $h = 0.1$ og får da

$$F(u) = 0.5\, u^3 - u^2 + 0.51\, u - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F'(u) = 1.5\, u^2 - 2\, u + 0.51$$

Vi beregner $u^{(k+1)} = u^{(k)} - F(u^{(k)})/F'(u^{(k)}$ i flg tabell

k	$u^{(k)}$	$F(u^{(k)})$	$F'(u^{(k)})$
0	2.000000	0.02	2.51
1	1.992032	$0.126729 \cdot 10^{-3}$	2.478222
2	1.991980	$0.519868 \cdot 10^{-8}$	2.478019
3	1.991980	$0.874959 \cdot 10^{-17}$	2.478019

Vi konkluderer med at $u_2 = 1.991980$ er korrekt med 6 desimaler.

c) Finn et polynom $p(x)$ av grad høyst 3 som oppfyller

$$p(0) = 2,\ p'(0) = 0,\ p(h) = u^*,\ p'(h) = (u^* - 2)/h,$$

der h og u^* er vilkårlige parametre. Bruk dette til å approksimere $u(0.05)$ for Van der Pol oscillatoren med u_0, v_0 og α som i forrige punkt.

Svar: Det fins flere måter å angripe dette problemet på, for eksempel med generaliserte dividerte differenser. Men vi kan umiddelbart se fra venstre endepunkt at

$$p(\theta h) = 2 + a\theta^3 + b\theta^2 \qquad \Rightarrow \qquad p'(\theta h) = \frac{1}{h}(3a\theta^2 + 2b\theta)$$

Nå er $p(h) = 2 + a + b = u^*$ og $p'(h) = \frac{1}{h}(3a + 2b) = \frac{1}{h}(u^* - 2)$. Dermed blir $a = 2 - u^*$ og $b = 2(u^* - 2)$, dvs

$$p(\theta h) = 2 + (2 - u^*)\theta^3 + 2(u^* - 2)\theta^2$$

Nå kan man approksimere $u(0.05)$ fra tidligere ved å ta $\theta = \frac{1}{2}$, $h = 0.1$, og $u^* = u_1$ $p(0.05) = 2 + (2 - u_1)/8 + 2(u_1 - 2)/4 = 1.25 + 0.375u_1 = 1.996992$.

Oppgave 3 Enden av en robotarm beveger seg langs en bane i xy-planet som kan beskrives av en parabellignende graf $(x, f(x))$ dvs $f(x)$ kan approksimeres vel av et polynom $p(x)$ av grad 2. Følgende punktobservasjoner er gjort.

x_m	-1.0	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1.0
y_m	`-8.7065e-03`	`3.2370e-01`	`9.4428e-01`	`1.2189`	`1.1431`	`1.0584`

En antar at x-verdiene er eksakte, mens det er usikkerhet i y-verdiene.

a) Finn $p(x) \in \Pi_2$ som minimerer kvadratsummen

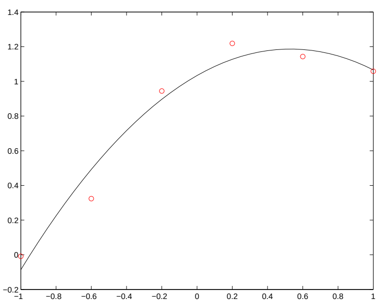
$$E[p] = \sum_{m=1}^{6} (y_m - p(x_m))^2$$

Svar:

Vi setter opp normalligningene ved å la $\phi_k(x) = x^{k-1}, k = 1, 2, 3,$ og definere 6×3-matrisen Φ ved at $\Phi_{m,k} = \phi_k(x_m)$. En ser på $\Phi^T \Phi\, c = \Phi^T\, y$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2.8 \\ 0 & 2.8 & 0 \\ 2.8 & 0 & 2.2624 \end{bmatrix} \cdot c = \begin{bmatrix} 4.6797 \\ 1.6137 \\ 1.6643 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} 1.0336 \\ 0.5763 \\ -0.5436 \end{bmatrix}$$

Så $p(x) = 1.0336 \,+\, 0.5763\, x \,-\, 0.5436\, x^2$



b) En har mistanke om at to av datapunktene er ganske unøyaktige, nemlig det andre $(-0.6,$ `3.2370e-01`$)$, og det fjerde $(0.2, 1.2189)$. En vil derfor tillegge disse noe mindre vekt, og definerer derfor den vektede kvadratsummen

$$E_w[p] = \sum_{m=1}^{6} w_m (y_m - p(x_m))^2$$

og setter $w_1 = w_3 = w_5 = w_6 = 1$ og $w_2 = w_4 = \frac{1}{2}$. En kan definere et indreprodukt på $\mathbf{R}^6$ ved

$$\langle u, v \rangle_w = \sum_{m=1}^{6} w_m u_m v_m$$

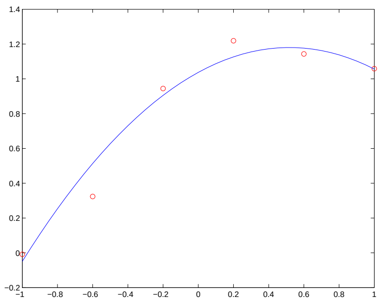
Til et polynom $\phi \in \Pi_2$ assosieres vektoren $\bar{\phi} = [\phi(x_1), \ldots, \phi(x_6)]^T \in \mathbf{R}^6$. Det viser seg at de tre polynomene

$$\phi_0(x) \equiv 1, \quad \phi_1(x) = x - \frac{1}{25}, \quad \phi_2(x) = x^2 - \frac{13}{25}$$

oppfyller at $\langle \bar{\phi}_k, \bar{\phi}_\ell \rangle_w = 0$ når $k \neq \ell$. Bruk dette uten bevis til å finne $q \in \Pi_2$ som minimerer $E_w[q]$.

Svar: Fra ortogonalitetsprinsippet følger at det søkte polynom $p(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) \in \Pi_2$ oppfyller normalligningene

$$\sum_{\ell=0}^{2} c_\ell \langle \bar{\phi}_\ell, \bar{\phi}_k \rangle_w = \langle y, \bar{\phi}_k \rangle_w, \quad k = 0, 1, 2,$$



og det at $\langle \bar{\phi}_k, \bar{\phi}_\ell \rangle_w = 0$ når $k \neq \ell$, leder da til den særdeles enkle løsningen

$$c_\ell = \frac{\langle y, \bar{\phi}_\ell \rangle_w}{\langle \bar{\phi}_\ell, \bar{\phi}_\ell \rangle_w},$$

$$\text{dvs} \quad c_0 = 0.7818, \quad c_1 = 0.5527, c_2 = -0.5335$$

Om en regner om $p(x)$ til kanonisk form fås

$$p(x) = -0.5335\, x^2 + 0.5527\, x + 1.0370$$

Noen nyttige formler.

1. **Chebyshev-kvadratur**

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} f(x_{n,k})$$

$$\left.\begin{aligned} c_{n,k} &= \tfrac{\pi}{n} \\ x_{n,k} &= \cos \tfrac{2k-2n-1}{2n}\pi \end{aligned}\right\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

2. **Feil i Chebyshev-kvadratur**

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{\pi}{(2n)!\, 2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1$$