Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK (TMA4215)

08. august 2006
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 15.08.2006

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 La $\mathcal{S}$ være vektorrommet av kvadratiske splinefunksjoner på intervallet $[-1,1]$ med skjøter i $-1,0,1$.

a) Finn $S \in \mathcal{S}$ som oppfyller

$$S(-1)=0, \quad S(0)=1, \quad S'(0)=2, \quad S(1)=2.$$

Svar: $S(x)=x^2+2x+1$ i $[-1,0]$ og $S(x)=-x^2+2x+1$ i $[0,1]$

b) Finn så $S \in \mathcal{S}$ som oppfyller $S(-1)=0,\ S(0)=1,\ S(1)=2$ og slik at $\int_{-1}^{1} S(x)^2\,\mathrm{d}x$ er minst mulig.

Svar: $S(x)=1-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}x^2$ for $x\in[-1,0]$ og $S(x)=1-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^2$ for $x\in[0,1]$

Oppgave 2 Funksjonen $f(x)$ er tabulert ekvidistant i punktene $x_k = 1-0.1\,k$

k	0	1	2	3	4	5	6
$f(1-0.1\,k)$	0.0000	0.05263	0.1111	0.1000	0.1764	0.2500	0.3333

a) Sett opp tabellen over bakoverdifferenser for dette datasettet.

Svar:

0.0000						
	-0.05263					
0.05263		0.005848				
	-0.05848		-0.001032			
0.1111		0.006879		$0.2580 \cdot 10^{-3}$		
	-0.06536		-0.001280		$-.8600 \cdot 10^{-4}$	
0.1000		0.008170		$0.3440 \cdot 10^{-3}$		$.3686 \cdot 10^{-4}$
	-0.07353		-0.001634		$-.1229 \cdot 10^{-3}$	
0.1764		0.009804		$.4669 \cdot 10^{-3}$		
	-0.08333		-0.002101			
0.2500		0.01190				
	-0.09524					
0.3333						

b) Finn interpolasjonspolynomet $p(x)$ av grad 3 basert på abscisseverdier nærmest mulig $x = 1$, angi gjerne polynomet ved bruk av bakoverdifferenseformen.

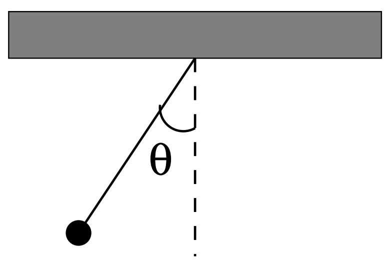
Svar: La $h = 0.1$ og sett $x = x_n + sh = 1 + 0.1 \cdot s$

$$p(x) = p(1 + 0.1 \cdot s) = -\binom{-s}{1}$$

c) Anta at funksjonen $f(x)$ er minst 4 ganger kontinuerlig deriverbar, og estimer feilen $f(1) - p(1)$.

Oppgave 3

Vi ønsker å beregne utslagsvinkelen θ til en matematisk pendel av lengde ℓ som funksjon av tiden t. Ved starten $t = 0$ har pendelen utslagsvinkelen α (der $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) og null hastighet. Funksjonen $\theta = \theta(t)$ kan da implisitt beskrives ved ligningen



$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\cos u - \cos \alpha}} \tag{1}$$

der $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ er tyngdens akselerasjon. Ved et variabelskifte kan (1) omformes til

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-\pi/2}^{\psi} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 v}} \tag{2}$$

der

$$\sin\frac{\theta}{2} = -\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\psi \tag{3}$$

Vi kan nå beregne samhørende verdier av t og θ ved numerisk integrasjon enten av høyresiden til (1) eller høyresiden av (2) og deretter bruk av (3).

a) Forklar hvorfor det er mye bedre å bruke den sammensatte trapesformelen på (2) enn på (1)

b) Anta at vi bruker den sammensatte trapesformelen på (2) med skrittlengde h og at $-\frac{\pi}{2} < \psi \leq -\frac{\pi}{4}$. Vis at følgende er en øvre skranke for absoluttverdien til avbruddsfeilen i t

$$|\Delta t| \leq \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{\pi}{48}\frac{\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,(1+\frac{3}{4}\tan^2\frac{\alpha}{2})\,h^2$$

c) La nå $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ og $\ell = 1$ meter. Bruk trapesformelen med skrittlengde $h = \frac{\pi}{8}$ i (2) for å finne t for henholdsvis $\psi = -\frac{3\pi}{8}$ og $\psi = -\frac{\pi}{4}$. Hvor mange signifikante siffer har svarene.