Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Arne Morten Kvarving   tlf: 97544792

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

Torsdag 14. desember 2006
Tid: 15:00–19:00,   Sensur: 04.01.2007

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cosh x} \qquad (\text{der } \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + e^{-x}}{2})$$

Du kan uten videre anta i denne oppgaven at for alle $m \in \mathbb{N}$ er

$$\max_{0\le x\le 1} |f^{(m)}(x)| \le M_m \quad \text{der } M_m = m! \cdot 3 \cdot 1.55^{-m}$$

For hvert positivt heltall n defineres $n+1$ abscisser (Chebyshev-punkter relativt til $[0,1]$)

$$x_{n,k} = \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}, \quad k = 0, \ldots, n$$

a) Finn polynomet av grad 2 som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}$. Skriv svaret på formen $p_2(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$.

Svar: Vi finner først de tre abscissene

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 0.066987,\ \frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 0.93301.$$

En kan bruke hvilken algoritme man ønsker, svaret skal bli

$$p_2(x) := 1.015260568 - 0.266903474\,x - 0.4142081736\,x^2$$

b) Anta at vi med bruk av abscissene ovenfor vil sikre oss at den maksimale interpolasjonsfeilen i intervallet $[0,1]$ vil være høyst 10^{-6} og bestem den minste verdien av n som gjør dette mulig.

Svar: Her er det viktig merke seg at punktene som brukes er Chebyshevpunkter relativt til $[0,1]$, det vil si at de oppgitte $x_{n,k}$ er nullpunkter til polynomet $T_{n+1}(2\,x-1)$. Vi bruker skranken

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!)} \prod_{k=0}^{n} (x - x_{n,k})$$

Produktet på høyre side må altså være en konstant multiplisert med polynomet $T_{n+1}(2x-1)$. Vi husker at $T_{n+1}(y) = 2^n y^{n+1} + \cdots$, så derfor er

$$T_{n+1}(2x-1) \;=\; 2^n (2x-1)^{n+1} + \cdots \;=\; 2^{2n+1} x^{n+1} + \cdots$$

så ledende koeffisient er 2^{2n+1}. Derfor er produktet ovenfor lik $2^{-2n-1}\,T_{n+1}(2x-1)$ og maksverdien av dette på intervallet $[0,1]$ er dermed 2^{-2n-1}. Vi trenger nå kun å bruke den oppgitte skranken for $|f^{(m)}(x)|$ på $[0,1]$ med $m = n+1$ og får da

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(x) - p_n(x)| \le 3 \cdot 1.55^{-n-1} \cdot 2^{-2n-1}$$

For å oppnå en maksfeil på høyst ε må vi kreve

$$3 \cdot 1.55^{-n-1} \cdot 2^{-2n-1} \le \varepsilon$$

Tar vi logaritmen (som er monotont voksende for positivt argument) på begge sider og løser m.h.p. n fås

$$n \ge 0.55 \cdot \ln\left(\frac{0.97}{\varepsilon}\right)$$

Dette blir generelt et ikke heltallig svar, derfor må vi runde oppover til nærmeste heltall. Med $\varepsilon = 10^{-6}$ fås $n = 8$ når man runder oppover. NB! Dersom man hadde brukt Chebyshevpolynomet uten "skalering" ville man fått $n = 13$.

c) Bestem integralet

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x$$

med feil som garantert er mindre enn 10^{-4}. Begrunn svaret og fremgangsmåten.

Svar: Her kan man egentlig velge hvilken metode man vil bruke, men merk at slik oppgaven er formulert, så holder det ikke med et feilestimat, man må bruke en feilskranke. Dette blir imidlertid ikke så veldig vanskelig her fordi man har oppgitt skranker for m'te deriverte. La oss prøve med Simpsons regel. Vi må finne ut hvor mange delintervaller $n(=\frac{b-a}{h} = 1/h)$ vi trenger. Skranken for sammensatt Simpsons regel står i boka, den kan her brukes på formen

$$|I(f) - S_n(f)| \le \frac{1}{180}\,h^4 \max_{0 \le x \le 1} |f^{(4)}(x)|$$

Setter vi inn den oppgitte skranken får vi kravet $0.07h^4 \leq 10^{-4}$ som gir $h \approx 0.195$ dermed må vi velge minst $n = 6$ delintervaller (merk også at n må være et liketall i Simpson.) Så det burde gå greit med $h = 1/6$ og

$$S_6(f) = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(\frac{1}{6}) + 2f(\frac{1}{3}) + 4f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{2}{3}) + 4f(\frac{5}{6}) + f(1)) \approx 0.7437$$

Merk at tilsvarende skranker i trapes og midtpunkt ville gitt hhv 46 og 34 delintervaller, som ville blitt vel mye arbeid på en eksamen. Såvidt jeg kan se står ikke feilformelen for Gausskvadratur i boka, så dette er kanskje mindre aktuelt. Husk at man også her (som i b) må transformere intervallet $[-1, 1]$ til $[0, 1]$.

Oppgave 2 For en gitt glatt funksjon $f(x)$ skal vi studere formelen

$$N_h(f)(x) = \frac{1}{h^3}\left(-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)\right) \qquad (1)$$

for approksimasjon av $f^{(3)}(x)$ (tredjederivert av f).

a) Test ut formelen på eksemplet $f(x) = \sin x$ med $x = 0$ og $h = 0.1$.

Svar: Vi kan benytte at $\sin(x)$ er odde om $x = 0$

$$N_h(\sin)(x) = 0.1^{-3}(\sin(0.2) - 2\sin 0.1) \approx -0.9975$$

Merk at det eksakte svaret er $-\cos 0 = -1$.

b) Vis at

$$N_h(f)(x) = f^{(3)}(x) + K_2h^2 + K_4h^4 + \cdots$$

det vil si, kun like potenser av h. Bestem også et uttrykk for K_2.

Svar: En kan argumentere for den like utviklingen kun ved å peke på og deretter benytte at $N_{-h}(f) = N_h(f)$. For

$$N_h(f) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j\, h^j \quad \Rightarrow N_{-h}(f) = \sum_{j=0\infty} (-1)^j K_j\, h^j$$

slik at

$$N_h(f) = \frac{1}{2}(N_h(f) + N_{-h}(f)) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{2m}\, h^{2m}$$

Spesielt kan vi se på h^0- og h^2-bidraget ved å ta med hhv h^3- og h^5-leddet for Taylorrekka omkring $h = 0$ for hver av $f(x \pm h), f(x \pm 2h)$. Vi beregner

$$\frac{1}{2}(f(x+2h) - f(x-2h)) = 2hf'(x) + \frac{4}{3}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(x) + \cdots$$

og

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{1}{3}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{60}h^5 f^{(5)}(x) + \cdots$$

Trekker vi disse fra hverandre og dividerer med h^3 finner vi at at koeffisienten foran h^0-leddet blir $K_0 = f^{(3)}(x)$, mens

$$K_2 = \frac{1}{4} f^{(5)}(x).$$

c) Noen har benyttet formelen (1) på en glatt funksjon $f(x)$ og funnet følgende tabell for en gitt verdi av x

h	0.32	0.16	0.08
$N_h(f)(x)$	-0.250118	-0.253512	-0.253933

Bruk denne informasjonen til å lage en bedre (best mulig) approksimasjon til $f^{(3)}(x)$.

Svar: Nøkkelordet her her Richardson-ekstrapolasjon. Siden vi har en like utvikling av feilen kan vi bruke rekursjonsformel som i Romberg integrasjon, si

$$Q_{k,j} = Q_{k,j-1} + \frac{Q_{k,j-1} - Q_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

idet vi setter $Q_{k,1} = N_{h_k}(f)$ med $h_k = \frac{h_1}{2^{k-1}}$. I vårt tilfelle er $h_1 = 0.32$. Tabellen blir da

-0.250118		
-0.253512	-0.254643	
-0.253933	-0.254073	-0.254035

så svaret er -0.254035.

Oppgave 3 Vi skal se på det lineære systemet av 2 ordinære differensialligninger gitt ved

$$y' = A\,y, \qquad \text{der} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad y(0) = y_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

a) La $h = 0.4$, $u_0 = v_0 = 1$ og ta ett skritt med Euler's metode for dette problemet.

Svar: Vi får $u_1 = 0.6$ og $v_1 = -0.2$.

Vi lar nå på vanlig måte 2-normen til en vilkårlig vektor $y = [u, v]^T$ være definert som

$$\|y\|_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Det er ikke vanskelig å vise at for den eksakte løsningen av (2) gjelder

$$\|y(x)\|_2 = \mathrm{e}^{-2x}\, \|y_0\|_2, \quad \text{for alle } y_0.$$

b) Vis at dersom y_1, y_2, $y_3, \ldots$ framkommer ved å anvende Euler's metode med skrittlengde h på (2) så vil

$$\|y_{n+1}\|_2 = \sqrt{5h^2 - 4h + 1}\;\|y_n\|_2.$$

Finn den største mulige skrittlengde H slik at for alle $0 < h < H$ vil $y_n \to \vec{0}$ når $n \to \infty$.

Svar: Det kan være lurt å skrive $A = -2I + S$ der I er identitetsmatrisen og S er den skjevsymmetriske matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{slik at} \quad S^T S = I \quad \text{og } x^T S x = 0 \text{ for alle } x \in \mathbf{R}^2.$$

Dermed kan vi beregne (med $y_{n+1} = (I + hA)y_n$ fra Eulers metode) i det vi bruker disse egenskapene til matrisen S

$$\|y_{n+1}\|_2^2 = y_{n+1}^T y_{n+1} = y_n^T((1-2h)I + hS)^T((1-2h)I + hS)\,y_n = ((1-2h)^2 + h^2)y_n^T y_n$$

Så resultatet følger ved å ta kvadratroten på hver side. Nå finner vi det største mulige intervallet $E = (0, H)$ slik at $f(h) = 5h^2 - 4h + 1 < 1$ for $h \in E$.

$$5h^2 - 4h + 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad h(5h-4) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < h < H = 0.8$$

For $h \in (0, 0.8)$ vil altså $\|y_{n+1}\|_2 = \alpha(h)\|y_n\|_2$ med $\alpha(h) < 1$. Så $\|y_n\|_2 = \alpha(h)^n \|y_0\|_2 \to 0$ når $n \to \infty$. Merk at for alle $h > H$ vil (med unntak av når $y_0 \neq \vec{0}$) den numeriske løsningen gå mot uendelig når n øker.