Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (92663824)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK (TMA4215)

Tirsdag 4. desember 2007
Tid: 15:00 – 19:00 Sensur 4.januar.

Hjelpemidler (kode B):
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.

Oppgave 1 Forventet levetid t for en industrivifte som går ved ulike temperaturer T er gitt ved

Temperatur (℃)	30	40	50	60
Levetid (×1000 timer)	91	75	63	54

Finn tredjegradspolynomet $p(T)$ som interpolerer disse punktene. Bruk polynomet til å estimere forventet levetid ved 55 ℃.

Svar: Framgangsmåten er valgfri, og polynomet blir

$$t(T) = -\frac{1}{6000}T^3 + \frac{1}{25}T^2 - \frac{227}{60}T + 173$$

og

$$t(55) = \frac{931}{16} = 58.2 \quad (\times 1000 \text{ timer})$$

Oppgave 2 I denne oppgaven skal vi studere en implisitt flerskrittsmetode, gitt ved

$$y_{m+2} - (1+a)y_{m+1} + ay_m = h\left[f_{m+2} - \frac{1+a}{2}f_{m+1} + \frac{1-a}{2}f_m\right], \tag{1}$$

der $f_l = f(x_l, y_l)$ og a er en reell parameter.

a) Bestem metodens orden og oppgi feilkonstanten for alle verdier av a.

Svar: Ved innsetting finner vi at

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0, \qquad C_3 = \frac{a-7}{12}.$$

Dvs. metoden er av orden 2 for $a \neq 7$. For $a = 7$ har metoden orden 3, og feilkonstanten er $-1/3$.

b) En student tester metoden ved å løse ligningen

$$y' = -y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

fra 0 til 1. Hun setter $h = 0.1$ og bruker eksakt løsning $y_0 = 1$ og $y_1 = 1/(1+h)$ som startverdier. Den ikke-lineære ligningen i y_{m+2} blir løst til maskinpresisjon for hvert skritt.

Resultatet for to verdier av a er gitt i tabellen under. Siden dette er en test, er også absoluttverdien for feilen skrevet ut.

	$a = 0$		$a = 7$	
x_m	y_m	$\lvert y(x_m) - y_m\rvert$	y_m	$\lvert y(x_m) - y_m\rvert$
0.0	1.0000	0	1.0000	0
0.1	0.9091	0	0.9091	0
0.2	0.8313	$2.0271 \cdot 10^{-3}$	0.8338	$4.5256 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.7659	$3.3506 \cdot 10^{-3}$	0.7729	$3.6924 \cdot 10^{-3}$
0.4	0.7102	$4.0709 \cdot 10^{-3}$	0.7397	$2.5408 \cdot 10^{-2}$
0.5	0.6622	$4.4176 \cdot 10^{-3}$	0.8354	$1.6871 \cdot 10^{-1}$
0.6	0.6205	$4.5396 \cdot 10^{-3}$	1.6697	$1.0447 \cdot 10^{+0}$
0.7	0.5837	$4.5266 \cdot 10^{-3}$	5.6463	$5.0581 \cdot 10^{+0}$
0.8	0.5511	$4.4332 \cdot 10^{-3}$	17.2646	$1.6709 \cdot 10^{+1}$
0.9	0.5220	$4.2932 \cdot 10^{-3}$	42.9463	$4.2420 \cdot 10^{+1}$
1.0	0.4959	$4.1278 \cdot 10^{-3}$	97.5861	$9.7086 \cdot 10^{+1}$

Forklar disse resultatene.
Blant alle mulige valg av a, hvilke vil du anbefale studenten å bruke?

Svar: Feilen etter et skritt er mindre for $a = 7$ enn for $a = 0$, hvilket er i overensstemmelse med diskusjonen i **a)**. Økende feil for $a = 7$ tyder på problemer med stabilitet. Vi har vist at metoden er konsistent (orden ≥ 1), men ikke at den er nullstabil. Det karakteristiske polynomet er gitt ved

$$\rho(r) = r^2 - (1+a)r + a = (r-1)(r-a)$$

dvs. metoden er nullstabil bare for $-1 \leq a < 1$, noe som forklarer de gale svarene for $a = 7$. Du vil selvfølgelig anbefale studenten innstending om å velge verdier av a slik at metoden er nullstabil. I tillegg kan du argumentere for at feilkonstanten blir mindre jo nærmere a blir 1.

c) Lag en prediktor-korrektor metode med (1) og $a = 0$ som korrektor og "hoppe-bukk" metoden

$$y_{m+2} - y_m = 2hf(x_{m+1}, y_{m+1})$$

som prediktor. Dette paret skal brukes for å løse (2). Sett $h = 0.1$, bruk eksakt løsning som startverdier, og finn y_2.
Finn også et estimat for den lokale avbruddsfeilen.

Svar: Prediktor-korrektormetoden blir

$$\begin{aligned} y_{m+2}^{[0]} &= y_m + 2hf_{m+1} \\ y_{m+2}^{[i]} &= hf(x_{m+2}, y_{m+2}^{[i-1]}) + y_{m+1} - \frac{h}{2}(f_{m+1} - f_m), \qquad i = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

Vi får et feilestimat ved å bruke Milne's device (kap.3.5 i Owrens notat):

$$h\tau_{m+2} \approx \frac{C_3}{C_3^* - C_3}(y_{m+2} - y_{m+2}^{[0]})$$

der $C_3 = -7/12$ og $C_3^* = 1/3$ (feilkonstanten for prediktoren C_3^* står i notatet, eller du kan regne det ut.) Siden prediktor og korrektor har samme orden er en iterasjon tilstrekkelig (men du gjør ikke noe galt ved å bruke flere). Ved innsetting får vi

$$y_2^{[0]} = 0.834710, \qquad y_2^{[1]} = 0.83074, \qquad h\tau_2 \approx 2.52 \cdot 10^{-3}.$$

Oppgave 3 La $P_s(x)$ være det moniske (monic) Legendre-polynomet av grad s, og sett

$$R_s(x) = P_s(x) + \frac{s}{2s-1} P_{s-1}(x).$$

$R_s(x)$ har s distinkte, reelle røtter x_i i intervallet $[-1, 1]$. Disse røttene kan brukes til å konstruere kvadraturformler

$$Q_s(f) = \sum_{i=1}^{s} A_i f(x_i) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = I(f),$$

slik at $Q_s(p) = I(p)$ for alle polynomer p av grad mindre enn s.

a) Sett $s = 2$, og finn $Q_2(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$.
Hva blir presisjonsgraden til $Q_2(f)$?

Svar: For $s = 2$ blir $R_2(x) = (x+1)(x-1/3)$, og kvadraturformelen blir

$$Q_2(f) = f(-1)\int_{-1}^{1} \frac{x-1/3}{-1-1/3}dx + f(1/3)\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{1/3+1}dx = \frac{1}{2}f(-1) + \frac{3}{2}f(1/3)$$

Metoden har presisjonsgrad 2 (den integrerer 2.grads polynomer eksakt).

b) Bruk Q_2 til å finne en tilnærmelse til integralet $\int_{t_j}^{t_j+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Bruk dette igjen til å konstruere en sammensatt kvadraturformel basert på

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_j+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad t_j = a + jh, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Sett også opp uttrykket for feilen i den sammensatte formelen.
(Oppgitt: $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - Q_2(f) = \frac{2}{27}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (-1,1)$.)

Svar: Bruk overgangen $t = t_j + h(1+x)/2$. Da blir

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_j+h} f(t)dt &= \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(t_j + h\frac{1+x}{2}\right)dx \\ &= \frac{h}{4}\left(f(t_j) + 3f\left(t_j + \frac{2h}{3}\right)\right) + \frac{h^4}{27\cdot 8}\frac{d^3}{dt^3}f(\eta_j), \qquad \eta_j \in (t_j, t_j+h)\end{aligned}$$

Den sammensatte formelen blir da:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(t_j) + 3f\left(t_j + \frac{2h}{3}\right)\right] + \frac{b-a}{216}h^3\frac{d^3}{dt^3}f(\eta) \qquad \eta \in (a,b).$$

c) Bruk kvadraturformelen fra punkt **b**) med $n = 2$ til å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Finn også en øvre grense for feilen.
Hva må n være for at feilen garantert er mindre enn 10^{-5} ?
(Hvis du ikke har svart på punkt **b**), bruk Simpsons sammensatte formel i stedet. Bruk $n = 4$ for å approksimere integralet.)

Svar: Vi har $n = 2$, dvs. $h = 0.5$, og vi kan finne $f^{(3)}(t) = -6/(1+t)^4$. Ved innsetting:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = 0.694129 - \frac{0.5^3}{216}\frac{6}{(1+\eta)^4}.$$

Og feilen blir maksimalt

$$|E(f)| \le \frac{0.5^3}{216} \max_{\eta\in(0,1)} \frac{6}{(1+\eta)^4} = 3.47 \cdot 10^{-3}.$$

d) Vis at $Q_s(f)$ faktisk har presisjonsgrad $2s-2$.

Svar: Beviset er i all hovedsak det samme som beviset av Theorem 4.7 i B&F. Fra konstruksjonen vet vi at $Q_s(f)$ har presisjonsgrad minst $s-1$. Vi vet også at $\int_{-1}^{1} R_s(x)p(x)dx = 0$ for alle $p \in \mathbb{P}_{s-2}$. La nå p være et polynom av grad større eller lik enn s men mindre eller lik $2s-2$. Polynomdivisjon gir $(R_s(x) \in \mathbb{P}_s)$:

$$p(x) = q(x)R_s(x) + r(x), \qquad q, r \in \mathbb{P}_{s-2}$$

Vi får

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)R_s(x)dx + \int_{-1}^{1} r(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)dx.$$

Det første leddet forsvinner siden $q \in \mathbb{P}_{s-2}$. Tilsvarende

$$Q_s(p) = \sum_{i=1}^{s} A_i \left(q(x_i)R_s(x_i) + r(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{s} A_i r(x_i) = \int_{-1}^{1} r(x)dx.$$

siden $R_s(x_i) = 0$ og Q_s har presisjonsgrad minst $s-1$.