Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)
Lørdag 04. desember 2004
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 05.01.2005

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Hvis et stivlegeme roterer uten påvirkning av ytre krefter vil hver koordinat av legemets vinkelhastighet være periodisk med periode $4K$ der K er gitt ved integralet

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} \tag{1}$$

og der m er en størrelse som avhenger av legemets spinn, energi og treghetsmoment.

a) En medstudent har beregnet approksimasjoner til $K(0.9)$ ved hjelp av midtpunktmetoden med n intervaller for forskjellige verdier av n som i tabellen

n	1	2	4	8	16
U_n	2.118061	2.474199	2.572352	2.578070	2.578092

Beregn sammensatt trapes med $n = 32$ delintervaller og estimer feilen $|K(0.9) - T_{32}|$ (uten å analysere integranden i (1)).

b) Bruk Rombergintegrasjon til å beregne en approksimasjon til $K(0.9)$ med feil mindre enn $5 \cdot 10^{-4}$. Kommenter resultatet i forhold til hva du fikk i **a)**.

c) I en bok finner vi følgende tabell for $K(m)$

m	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$K(m)$	1.570796	1.612441	1.659623	1.713889	1.777519	1.854074	1.949567

Du skal estimere $K(0.32)$ ved interpolasjon. Bruk Nevilles algoritme med et minst mulig utvalg av datapunkter fra tabellen ovenfor slik at estimert feil i interpolasjonen blir mindre enn 10^{-3}.

d) En av koordinatfunksjonene nevnt ovenfor er relatert til den Jacobi-elliptiske funksjonen $\mathrm{sn}(u, m)$ som altså er periodisk i variablen u med periode $4K(m)$. Det viser seg også at $\mathrm{sn}(u, m) = -\mathrm{sn}(-u, m)$, noe som gjør det naturlig å approksimere den med en funksjon av typen

$$S(u, m) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(m) \cdot \sin\left(\frac{2\pi\ell u}{4K(m)}\right).$$

Sett $m = 0.5$, $n = 3$, og bestem $S(u, 0.5)$ som minimerer kvadratsummen

$$E = \sum_{r=0}^{7} (\mathrm{sn}(u_r, 0.5) - S(u_r, 0.5))^2, \quad u_r = \frac{1}{2} K(0.5)\, r,$$

Hint. Det oppgis at

$$f_\ell = \sum_{r=0}^{7} \mathrm{sn}(u_r, 0.5) \cdot \sin\left(\frac{2\pi\ell}{4K(0.5)}\, u_r\right),$$

ℓ	1	2	3
f_ℓ	4.164784	0.0	0.164784

Oppgave 2

a) Finn et andregradspolynom $p_\alpha(x)$ slik at

$$p_\alpha(x_0) = y_0, \quad p'_\alpha(x_0) = f_0, \quad p'_\alpha(x_0 + \alpha h) = f_\alpha$$

der $y_0, f_0, f_\alpha, \alpha > 0$ og $h > 0$ er gitte tall.

b) Vi skal nå konstruere en metode for å løse diffligningen

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0$$

Vi vil approksimere løsningen lokalt med et polynom $p(x_0 + \theta h)$ som oppfyller

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0) = f(y_0), \quad p'(x_0 + \alpha h) = f(p(x_0 + \alpha h)),$$

for en gitt positiv verdi av α. Deretter setter vi $y_1 := p(x_0 + h)$. Vis at en slik metode er ekvivalent med en implisitt Runge-Kutta-metode, og angi Butcher-tabellen for denne. Finn ut om det eksisterer en α slik at metoden har orden 3.

Oppgave 3 Konstruer den naturlige kubiske splinen $B(x)$ med skjøter $0, 1, 2, 3, 4$ som oppfyller

$$B(0) = 0, \qquad B(1) = \frac{1}{6}, \qquad B(2) = \frac{2}{3}, \qquad B(3) = \frac{1}{6}, \qquad B(4) = 0.$$