Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

15. august 2005
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 05.09.2005

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Bestem verdiene av a og b som gjør funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 + a(x-1) + b & x \in (1,3] \end{cases}$$

til en kvadratisk splinefunksjon på intervallet $[0, 3]$.

Oppgave 2

a) Funksjonen $f(x)$ er gitt i følgende punkter

x	-1	-0.5	0.0	0.5	1
$f(x)$	1.0000	0.1667	0.0000	0.1000	0.3333

Bestem tabellen over foroverdifferenser, og sett opp interpolasjonspolynomet.

b) La oss se på interpolasjonsfeilen for funksjonen $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$ på intervallet $[-1, 1]$ når man bruker $n+1$ abscisser $x_0, \ldots, x_n$ som er nullpunkter i Chebyshevpolynomet $T_{n+1}(x)$. Finn en skranke for maksimum av interpolasjonsfeilen over intervallet $[-1, 1]$ uttrykt ved n, når $n \geq 1$

Hint: Det er enkelt å finne $f^{(m)}(x)$ for $m \geq 2$ om en observerer at

$$f''(x) = \frac{8}{(2+x)^3} = 4 \cdot \frac{2!}{(2+x)^3}$$

Oppgave 3 En Runge-Kutta metode har Butchertabell gitt ved

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
1 & 1-\alpha & \alpha & \\
\hline
 & \beta & 1-2\beta & \beta
\end{array}
\tag{1}
$$

der α og β er parametre som må bestemmes.

a) Vis at metoden generelt har orden 2, og finn eventuelle verdier av α og β slik at metoden har orden 3.

b) Finn stabilitetspolynomet til metoden som funksjon av α og β.

c) For resten av oppgaven bruker vi metoden (1) med $\beta = -\frac{1}{10}$ og $\alpha = -4$. Vi vil gjerne prøve ut denne metoden på et spesifikt problem og velger initialverdiproblemet

$$
y' = \mu y^2, \qquad \mu < 0, \quad y(0) = y_0 \tag{2}
$$

der μ er en parameter. Utfør ett skritt med metoden der du bruker skrittlengde $h = 0.1$, $\mu = -1$ og $y_0 = 1$.

d) En student har gjort omfattende tester med metoden på initialverdiproblemet (2) og finner til sin store forundring at den oppfører seg som en fjerde ordens metode på dette problemet uansett verdi av μ og y_0. Gjør en analyse som forklarer denne oppførselen.