Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

Lørdag 10. desember 2005
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 05.01.2005

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Bestem

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

med minst 4 signifikante siffer (se oppgitte formler)

Oppgave 2 Van der Pol oscillatoren kan beskrives ved startverdiproblemet

$$u'' + \alpha(u^2 - 1)\, u' + u = 0, \qquad u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0 \tag{1}$$

Metoden *baklengs Euler* (reluE) for problemet $y' = f(y)$ har formen

$$y_{m+1} = y_m + h\, f(y_{m+1}) \tag{2}$$

der h er skrittlengden.

a) Vis at (2) anvendt på (1) leder til at en i første skritt kan finne $u_1 \approx u(h)$ ved å løse ligningen

$$\alpha h\, u^3 - \alpha h u_0\, u^2 + (1 - \alpha h + h^2)\, u - u_0(1 - h\alpha) - h v_0 = 0 \tag{3}$$

med hensyn på u.

b) Sett nå $\alpha = 5$, $h = 0.1$, $u_0 = 2$, $v_0 = 0$, og finn u_1 med minst 6 korrekte desimaler.

c) Finn et polynom $p(x)$ av grad høyst 3 som oppfyller

$$p(0) = 2,\ p'(0) = 0,\ p(h) = u^*,\ p'(h) = (u^* - 2)/h,$$

der h og u^* er vilkårlige parametre. Bruk dette til å approksimere $u(0.05)$ for Van der Pol oscillatoren med u_0, v_0 og α som i forrige punkt.

Oppgave 3 Enden av en robotarm beveger seg langs en bane i xy-planet som kan beskrives av en parabellignende graf $(x, f(x))$ dvs $f(x)$ kan approksimeres vel av et polynom $p(x)$ av grad 2. Følgende punktobservasjoner er gjort.

x_m	-1.0	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1.0
y_m	-8.7065e-03	3.2370e-01	9.4428e-01	1.2189	1.1431	1.0584

En antar at x-verdiene er eksakte, mens det er usikkerhet i y-verdiene.

a) Finn $p(x) \in \Pi_2$ som minimerer kvadratsummen

$$E[p] = \sum_{m=1}^{6} (y_m - p(x_m))^2$$

b) En har mistanke om at to av datapunktene er ganske unøyaktige, nemlig det andre $(-0.6, \texttt{3.2370e-01})$, og det fjerde $(0.2, 1.2189)$. En vil derfor tillegge disse noe mindre vekt, og definerer derfor den vektede kvadratsummen

$$E_w[p] = \sum_{m=1}^{6} w_m (y_m - p(x_m))^2$$

og setter $w_1 = w_3 = w_5 = w_6 = 1$ og $w_2 = w_4 = \frac{1}{2}$. En kan definere et indreprodukt på $\mathbf{R}^6$ ved

$$\langle u, v\rangle_w = \sum_{m=1}^{6} w_m u_m v_m$$

Til et polynom $\phi \in \Pi_2$ assosieres vektoren $\bar{\phi} = [\phi(x_1), \ldots, \phi(x_6)]^T \in \mathbf{R}^6$. Det viser seg at de tre polynomene

$$\phi_0(x) \equiv 1, \quad \phi_1(x) = x - \frac{1}{25}, \quad \phi_2(x) = x^2 - \frac{13}{25}$$

oppfyller at $\langle \bar{\phi}_k, \bar{\phi}_\ell\rangle_w = 0$ når $k \neq \ell$. Bruk dette uten bevis til å finne $q \in \Pi_2$ som minimerer $E_w[q]$.

Noen nyttige formler.

1. **Chebyshev-kvadratur**

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} f(x_{n,k})$$

$$\begin{array}{rcl} c_{n,k} & = & \frac{\pi}{n} \\ x_{n,k} & = & \cos\frac{2k-2n-1}{2n}\pi \end{array}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

2. **Feil i Chebyshev-kvadratur**

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1$$