Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK (TMA4215)

08. august 2006
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 15.08.2006

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 La $\mathcal{S}$ være vektorrommet av kvadratiske splinefunksjoner på intervallet $[-1, 1]$ med skjøter i $-1, 0, 1$.

a) Finn $S \in \mathcal{S}$ som oppfyller

$$S(-1) = 0, \quad S(0) = 1, \quad S'(0) = 2, \quad S(1) = 2.$$

b) Finn så $S \in \mathcal{S}$ som oppfyller $S(-1) = 0,\ S(0) = 1,\ S(1) = 2$ og slik at $\int_{-1}^{1} S(x)^2 \,\mathrm{d}x$ er minst mulig.

Oppgave 2 Funksjonen $f(x)$ er tabulert ekvidistant i punktene $x_k = 1 - 0.1\,k$

k	0	1	2	3	4	5	6
$f(1-0.1\,k)$	0.0000	0.05263	0.1111	0.1000	0.1764	0.2500	0.3333

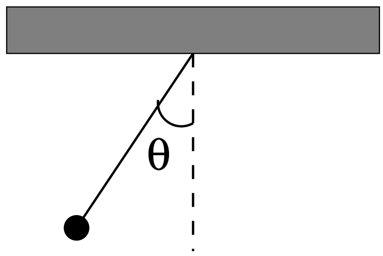
a) Sett opp tabellen over bakoverdifferenser for dette datasettet.

b) Finn interpolasjonspolynomet $p(x)$ av grad 3 basert på abscisseverdier nærmest mulig $x = 1$, angi gjerne polynomet ved bruk av bakoverdifferenseformen.

c) Anta at funksjonen $f(x)$ er minst 4 ganger kontinuerlig deriverbar, og estimer feilen $f(1) - p(1)$.

Oppgave 3

Vi ønsker å beregne utslagsvinkelen θ til en matematisk pendel av lengde ℓ som funksjon av tiden t. Ved starten $t = 0$ har pendelen utslagsvinkelen α (der $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) og null hastighet. Funksjonen $\theta = \theta(t)$ kan da implisitt beskrives ved ligningen



$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\cos u - \cos \alpha}} \tag{1}$$

der $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ er tyngdens akselerasjon. Ved et variabelskifte kan (1) omformes til

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-\pi/2}^{\psi} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 v}} \tag{2}$$

der

$$\sin \frac{\theta}{2} = -\sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi \tag{3}$$

Vi kan nå beregne samhørende verdier av t og θ ved numerisk integrasjon enten av høyresiden til (1) eller høyresiden av (2) og deretter bruk av (3).

a) Forklar hvorfor det er mye bedre å bruke den sammensatte trapesformelen på (2) enn på (1)

b) Anta at vi bruker den sammensatte trapesformelen på (2) med skrittlengde h og at $-\frac{\pi}{2} < \psi \leq -\frac{\pi}{4}$. Vis at følgende er en øvre skranke for absoluttverdien til avbruddsfeilen i t

$$|\Delta t| \leq \sqrt{\frac{\ell}{g}} \frac{\pi}{48} \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} (1 + \frac{3}{4} \tan^2 \frac{\alpha}{2})\, h^2$$

c) La nå $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ og $\ell = 1$ meter. Bruk trapesformelen med skrittlengde $h = \frac{\pi}{8}$ i (2) for å finne t for henholdsvis $\psi = -\frac{3\pi}{8}$ og $\psi = -\frac{\pi}{4}$. Hvor mange signifikante siffer har svarene.