Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Arne Morten Kvarving tlf: 97544792

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK(TMA4215)

Torsdag 14. desember 2006
Tid: 15:00–19:00, Sensur: 04.01.2007

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cosh x} \qquad (\text{der } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2})$$

Du kan uten videre anta i denne oppgaven at for alle $m \in \mathbb{N}$ er

$$\max_{0\le x\le 1} |f^{(m)}(x)| \le M_m \quad \text{der } M_m = m! \cdot 3 \cdot 1.55^{-m}$$

For hvert positivt heltall n defineres $n+1$ abscisser (Chebyshev-punkter relativt til $[0,1]$)

$$x_{n,k} = \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}, \quad k = 0, \dots, n$$

a) Finn polynomet av grad 2 som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}$. Skriv svaret på formen $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

b) Anta at vi med bruk av abscissene ovenfor vil sikre oss at den maksimale interpolasjonsfeilen i intervallet $[0,1]$ vil være høyst 10^{-6} og bestem den minste verdien av n som gjør dette mulig.

c) Bestem integralet

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x$$

med feil som garantert er mindre enn 10^{-4}. Begrunn svaret og fremgangsmåten.

Oppgave 2 For en gitt glatt funksjon $f(x)$ skal vi studere formelen

$$N_h(f)(x) = \frac{1}{h^3}\left(-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)\right) \qquad (1)$$

for approksimasjon av $f^{(3)}(x)$ (tredjederivert av f).

a) Test ut formelen på eksemplet $f(x) = \sin x$ med $x = 0$ og $h = 0.1$.

b) Vis at

$$N_h(f)(x) = f^{(3)}(x) + K_2h^2 + K_4h^4 + \cdots$$

det vil si, kun like potenser av h. Bestem også et uttrykk for K_2.

c) Noen har benyttet formelen (1) på en glatt funksjon $f(x)$ og funnet følgende tabell for en gitt verdi av x

h	0.32	0.16	0.08
$N_h(f)(x)$	-0.250118	-0.253512	-0.253933

Bruk denne informasjonen til å lage en bedre (best mulig) approksimasjon til $f^{(3)}(x)$.

Oppgave 3 Vi skal se på det lineære systemet av 2 ordinære differensialligninger gitt ved

$$y' = A\,y, \qquad \text{der} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad y(0) = y_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

a) La $h = 0.4$, $u_0 = v_0 = 1$ og ta ett skritt med Euler's metode for dette problemet.

Vi lar nå på vanlig måte 2-normen til en vilkårlig vektor $y = [u, v]^T$ være definert som

$$\|y\|_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Det er ikke vanskelig å vise at for den eksakte løsningen av (2) gjelder

$$\|y(x)\|_2 = \mathrm{e}^{-2x}\,\|y_0\|_2, \quad \text{for alle } y_0.$$

b) Vis at dersom y_1, y_2, $y_3, \ldots$ framkommer ved å anvende Euler's metode med skrittlengde h på (2) så vil

$$\|y_{n+1}\|_2 = \sqrt{5h^2 - 4h + 1}\;\|y_n\|_2.$$

Finn den største mulige skrittlengde H slik at for alle $0 < h < H$ vil $y_n \to \vec{0}$ når $n \to \infty$.