Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (92663824)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK (TMA4215)

Tirsdag 4. desember 2007
Tid: 15:00 – 19:00 Sensur 4.januar.

Hjelpemidler (kode B):
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.

Oppgave 1 Forventet levetid t for en industrivifte som går ved ulike temperaturer T er gitt ved

Temperatur (℃)	30	40	50	60
Levetid ($\times$1000 timer)	91	75	63	54

Finn tredjegradspolynomet $p(T)$ som interpolerer disse punktene. Bruk polynomet til å estimere forventet levetid ved 55 ℃.

Oppgave 2 I denne oppgaven skal vi studere en implisitt flerskrittsmetode, gitt ved

$$y_{m+2} - (1+a)y_{m+1} + ay_m = h\left[f_{m+2} - \frac{1+a}{2}f_{m+1} + \frac{1-a}{2}f_m\right], \tag{1}$$

der $f_l = f(x_l, y_l)$ og a er en reell parameter.

a) Bestem metodens orden og oppgi feilkonstanten for alle verdier av a.

b) En student tester metoden ved å løse ligningen

$$y' = -y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

fra 0 til 1. Hun setter $h = 0.1$ og bruker eksakt løsning $y_0 = 1$ og $y_1 = 1/(1+h)$ som startverdier. Den ikke-lineære ligningen i y_{m+2} blir løst til maskinpresisjon for hvert skritt.

Resultatet for to verdier av a er gitt i tabellen under. Siden dette er en test, er også absoluttverdien for feilen skrevet ut.

	$a = 0$		$a = 7$	
x_m	y_m	$\lvert y(x_m) - y_m\rvert$	y_m	$\lvert y(x_m) - y_m\rvert$
0.0	1.0000	0	1.0000	0
0.1	0.9091	0	0.9091	0
0.2	0.8313	$2.0271 \cdot 10^{-3}$	0.8338	$4.5256 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.7659	$3.3506 \cdot 10^{-3}$	0.7729	$3.6924 \cdot 10^{-3}$
0.4	0.7102	$4.0709 \cdot 10^{-3}$	0.7397	$2.5408 \cdot 10^{-2}$
0.5	0.6622	$4.4176 \cdot 10^{-3}$	0.8354	$1.6871 \cdot 10^{-1}$
0.6	0.6205	$4.5396 \cdot 10^{-3}$	1.6697	$1.0447 \cdot 10^{+0}$
0.7	0.5837	$4.5266 \cdot 10^{-3}$	5.6463	$5.0581 \cdot 10^{+0}$
0.8	0.5511	$4.4332 \cdot 10^{-3}$	17.2646	$1.6709 \cdot 10^{+1}$
0.9	0.5220	$4.2932 \cdot 10^{-3}$	42.9463	$4.2420 \cdot 10^{+1}$
1.0	0.4959	$4.1278 \cdot 10^{-3}$	97.5861	$9.7086 \cdot 10^{+1}$

Forklar disse resultatene.
Blant alle mulige valg av a, hvilke vil du anbefale studenten å bruke?

c) Lag en prediktor-korrektor metode med (1) og $a = 0$ som korrektor og "hoppe-bukk" metoden

$$y_{m+2} - y_m = 2hf(x_{m+1}, y_{m+1})$$

som prediktor. Dette paret skal brukes for å løse (2). Sett $h = 0.1$, bruk eksakt løsning som startverdier, og finn y_2.
Finn også et estimat for den lokale avbruddsfeilen.

Oppgave 3 La $P_s(x)$ være det moniske (monic) Legendre-polynomet av grad s, og sett

$$R_s(x) = P_s(x) + \frac{s}{2s-1} P_{s-1}(x).$$

$R_s(x)$ har s distinkte, reelle røtter x_i i intervallet $[-1, 1]$. Disse røttene kan brukes til å konstruere kvadraturformler

$$Q_s(f) = \sum_{i=1}^{s} A_i f(x_i) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = I(f),$$

slik at $Q_s(p) = I(p)$ for alle polynomer p av grad mindre enn s.

a) Sett $s = 2$, og finn $Q_2(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$.
Hva blir presisjonsgraden til $Q_2(f)$?

b) Bruk Q_2 til å finne en tilnærmelse til integralet $\int_{t_j}^{t_j+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Bruk dette igjen til å konstruere en sammensatt kvadraturformel basert på

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_j+h} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad t_j = a + jh, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Sett også opp uttrykket for feilen i den sammensatte formelen.
(Oppgitt: $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - Q_2(f) = \frac{2}{27} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1)$.)

c) Bruk kvadraturformelen fra punkt **b**) med $n = 2$ til å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Finn også en øvre grense for feilen.
Hva må n være for at feilen garantert er mindre enn 10^{-5} ?

(Hvis du ikke har svart på punkt **b)**, bruk Simpsons sammensatte formel i stedet. Bruk $n = 4$ for å approksimere integralet.)

d) Vis at $Q_s(f)$ faktisk har presisjonsgrad $2s - 2$.