Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (92663824)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK (TMA4215)

Mandag 8. desember 2008
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 8.januar.

Hjelpemidler (kode B):
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene

x	-1.0	0.0	0.5	1.0
y	0.25	-0.5	0.25	2.75

Oppgave 2 Beregn en tilnærmelse av integralet

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)dx \tag{1}$$

ved hjelp av Romberg-integrasjon. Finn R_{33}.

Vi vil nå studere hvor nøyaktig svar vi får ved Romberg-integrasjon. La R være Romberg-tabellen, I eksakt verdi av integralet, slik at $E = I - R$ er en tabell over feilen i hvert enkelt element i Romberg-tabellen, dvs. $E_{kj} = I - R_{kj}$. Anvendt på integralet over får vi følgende tabell over feilen (her har vi tatt med verdier til og med E_{55}).

5.6514e-02				
1.5648e-02	2.0266e-03			
4.2178e-03	4.0765e-04	2.9972e-04		
1.1111e-03	7.5583e-05	5.3445e-05	4.9536e-05	
2.8799e-04	1.3602e-05	9.4703e-06	8.7722e-06	8.6124e-06

Bruker vi i stedet Romberg-integrasjon på integralet $\int_0^1 \sin(x)dx$ blir den tilsvarende feiltabellen:

3.8962e-02				
9.6172e-03	1.6450e-04			
2.3968e-03	1.0051e-05	2.4553e-07		
5.9872e-04	6.2467e-07	3.7420e-09	9.5981e-11	
1.4965e-04	3.8987e-08	5.8109e-11	3.6549e-13	9.5479e-15

Kommenter resultatene.

Oppgave 3

a) Finn de første 3 polynomene som er ortogonale på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle_w = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)g(x)dx.$$

b) Finn en kvadraturformel på formen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

med optimal presisjonsgrad. Bruk denne til å finne en tilnærmelse til integralet i forrige oppgave, (1).

Oppgave 4 Modifisert Euler er en 2.ordens Runge–Kutta metode, gitt ved Butcher-tabellen

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}\,. \tag{2}$$

Denne skal brukes til å løse differensialligningen

$$y'' = y' \cdot y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.5. \tag{3}$$

a) Skriv om (3) til et system av 1.ordens differensialligninger. Finn tilnærmelser til $y(0.1)$ og $y'(0.1)$ ved å ta et skritt med den oppgitte metoden.

b) Se nå på en Runge–Kutta metode i 3 nivåer, gitt ved

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \end{array}\,.$$

La $c_3 = 1$ og bestem de øvrige parametrene slik at metoden blir av orden 3.

Metoden (2) sammen med den 3.ordens metoden fra punkt **b)** danner et "embedded Runge–Kutta par". Dette gir grunnlaget til en adaptiv algoritme for å løse ordinære differensialligninger. Vi vil nå bruke dette paret for å løse (3) med en nøyaktighet på 10^{-3}.

c) Fra **a)** har vi løsningen $y_1 \approx y(0.1)$ og $y_1' \approx y'(0.1)$.

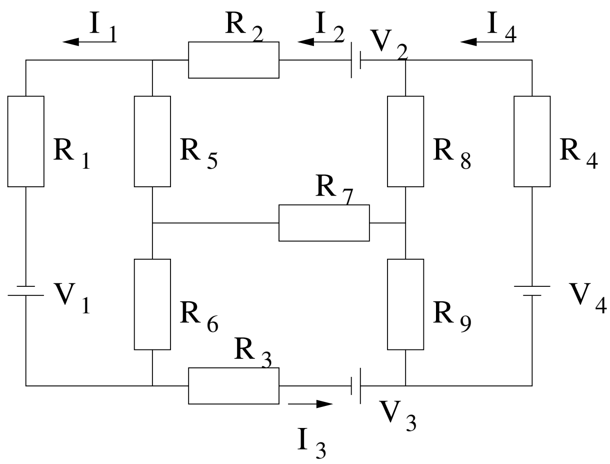
- Finn et estimat for feilen (målt i max-norm).
- Skal løsningen aksepteres eller underkjennes?
- Beregn neste skrittlengde.
  Bruk feil pr. skritt (EPS) og pessimistfaktor $P = 0.75$ i skrittlengdekontrollen.

Hint: Ordensbetingelsene for Runge–Kutta metoder er gitt ved:

orden	betingelse
1	$\sum b_i = 1$
2	$\sum b_i c_i = 1/2$
3	$\sum b_i c_i^2 = 1/3$
	$\sum b_i a_{ij} c_j = 1/6$

with $\quad c_i = \sum_j a_{ij}$.

Oppgave 5 I denne oppgaven ser vi på følgende elektriske krets:



Vi ønsker å finne strømmene I_i, $i = 1, \ldots, 4$ når motstandene R_i, $i = 1, \ldots, 9$ og spenningskildene V_i, $i = 1, \ldots, 4$ er gitt. Kirshoffs strøm- og spenningslover, samt Ohm's lov gir følgende ligningssystem:

$$
\begin{aligned}
R_1 I_1 + R_5(I_1 - I_2) + R_6(I_1 - I_3) &= V_1, \\
R_2 I_2 + R_5(I_2 - I_1) + R_7(I_2 - I_3) + R_8(I_2 - I_4) &= V_2, \\
R_3 I_3 + R_6(I_3 - I_1) + R_7(I_3 - I_2) + R_9(I_3 - I_4) &= V_3, \\
R_4 I_4 + R_8(I_4 - I_2) + R_9(I_4 - I_3) &= V_4.
\end{aligned}
$$

Du kan anta at $R_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$, mens $R_i \geq 0$ for $i = 5, \ldots, 9$.

a) Vis at denne ligningen alltid har en løsning, og at Jacobi- eller Gauss-Seidel iterasjoner vil konvergere mot løsningen uavhengig av valg av startverdier.

b) Sett $R_1 = R_2 = 10$, $R_3 = R_4 = 25$, $R_i = 15$, $i = 5, \ldots, 9$, $V_1 = V_4 = 6$, $V_2 = V_3 = 0$. Utfør en Gauss-Seidel iterasjon på systemet. Bruk $I_i^{(0)} = V_i/R_i$, $i = 1, \ldots, 4$ som startverdi.