Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (92663824)

EKSAMEN I NUMERISK MATEMATIKK (TMA4215)

Lørdag 19. desember 2009
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 15.januar.

Hjelpemidler (kode B):
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.

Alle svar skal begrunnes.
Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig framkommer hvilke metoder og mellomresultater som benyttes.

Oppgave 1 Finn en tilnærmelse til integralet

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

ved hjelp av sammensatt Simpsons metode. Bruk $h = 0.25$.

Finn en øvre grense for feilen.

Oppgave 2 Gitt ligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

med

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 3.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 4.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.1 & 3.0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

Dette systemet skal løses ved hjelp av en iterativt teknikk. A-matrisa er ikke diagonaldominant, altså er det vanskelig å vite om Jacobi- eller Gauss–Seidel iterasjoner konvergerer. I stedet prøver vi å splitte A-matrisa,

$$A = N - P$$

med

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Iterasjonsskjemaet blir da:

$$N\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}.$$

a) La $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0,0]^T$, og beregn $\mathbf{x}^{(2)}$.

b) Vis at iterasjonsskjemaet tilfredsstiller

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq 0.2 \cdot \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$$

der $\mathbf{x}$ er den eksakte løsningen av (1).

Finn en øvre grense for feilen $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}\|_\infty$.

Oppgave 3

a) Verdien av en funksjon $f(x)$ er kjent i punktene

x_i	0.00	0.60	1.00
$f(x_i)$	0.00	0.75	0.50

Finn polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer $f(x)$ i de tre punktene.

b) Finn polynomet $q(x)$ av lavest mulig grad som tilfredsstiller interpolasjonsbetingelsene over *i tillegg til* betingelsen $q'(0.6) = f'(0.6) = 0.5$.

Hint: Sett $q(x) = p(x) + r(x)$. Hvilke nullpunkter har $r(x)$?

c) Vis at under visse omstendigheter (hvilken?) finnes en $\xi_x \in (0,1)$ slik at interpolasjonsfeilen tilfredsstiller

$$f(x) - q(x) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_x) w(x),$$

der

$$w(x) = x(x-1)(x-0.6)^2.$$

Oppgave 4 Denne oppgaven går ut på å utvikle metoder for 2. ordens differensialligninger på formen

$$y'' = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0. \tag{2}$$

Skrittlengden h er konstant, $t_n = t_0 + nh$ og $y_n \approx y(t_n)$ er den numeriske approksimasjonen til løsningen. I vedlegget bakerst i oppgavesettet finner du en del nyttig informasjon om slike ligninger, og numerisk løsning av disse.

a) Skriv opp (2) som et system av 1. ordens differensialligninger. Vis at to skritt med Eulers metode anvendt på dette systemet kan settes sammen til en flerskrittsmetode på formen:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(t_{n-1}, y_{n-1}).$$

Bestem metodens konvergensegenskaper.

b) La $p(t)$ være polynomet som interpolerer funksjonen $f(t, y(t))$ i punktene t_n, t_{n-1} og t_{n-2}. Bruk dette til å konstruere en flerskrittsmetode på formen

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{l=0}^{2} \beta_l f(t_{n+l-2}, y_{n+l-2}).$$

Bestem β_0, β_1 og β_2, og finn metodens orden.

Hint: Skriv $p(t)$ ved hjelp av Newtons bakover-differanseformel.

Vedlegg

Den eksakte løsningen av ligningen

$$y'' = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0 \tag{3}$$

tilfredsstiller

$$y(t_{n+1}) - 2y(t_n) + y(t_{n-1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n + h - t) f(t, y(t)) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - h - t) f(t, y(t)) dt,$$

der $t_n = t_0 + nh$.

En generell lineær flerskrittsmetode anvendt på (3) er gitt som

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha_l y_{n+l} = h^2 \sum_{l=0}^{k} \beta_l f(t_{n+l}, y_{n+l}). \tag{4}$$

Den lokale avbruddsfeilen er definert som

$$h^2 \tau_{n+k}(h) = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l y(t_{n+l}) - h^2 \sum_{l=0}^{k} \beta_l f(t_{n+l}, y(t_{n+l})).$$

For alle tilstrekkelig glatte $y(t)$ har denne en Taylor-rekke

$$h^2 \tau_{n+k}(h) = C_0 y(t_n) + C_1 h y'(t_n) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(t_n) + \cdots$$

Metoden er konsistent hvis

$$\lim_{h \to 0} \tau_{n+k}(h) = 0,$$

og *konsistent av orden p* dersom

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_{p+1} = 0, \; C_{p+2} \neq 0.$$

Det kan vises at den numeriske løsningen er *konvergent av orden p* dersom

- Metoden er konsistent av orden p.
- Den er stabil, dvs. det karakteristiske polynomet $\sum_{l=0}^{k} \alpha_l r^l$ har røtter r_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ som alle tilfredsstiller $|r_j| \leq 1$, og røtter med absoluttverdi 1 har multiplisitet maksimalt 2.

I tillegg må selvsagt startverdiene y_l, $l = 0, 1, \ldots, k-1$ være tilstrekkelig nøyaktige. På eksamen kan du anta at det er oppfyllt.