

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

a) Vi vil vise at feilen oppfyller

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^q} = C.$$

i) Nullpunktet $x^* = \arccos 0,5 \approx 1,0471975512$, og

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
0	0,5000000000	$5,47 \cdot 10^{-1}$	$4,39 \cdot 10^{-1}$	0,803
1	1,2875729002	$2,40 \cdot 10^{-1}$	$4,44 \cdot 10^{-2}$	0,185
2	1,0578736992	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,283
3	1,0472298506	$3,23 \cdot 10^{-5}$	$9,32 \cdot 10^{-6}$	0,287
4	1,0471975514	$3,01 \cdot 10^{-10}$	$8,69 \cdot 10^{-11}$	0,287
5	1,0471975512	$2,62 \cdot 10^{-20}$	$7,56 \cdot 10^{-21}$	0,287
6	1,0471975512	$1,98 \cdot 10^{-40}$		

Vi har som forventet kvadratisk konvergens, dvs. $q = 2$, med $C = 0,287$ (i dette tilfellet er beregningene gjort i Maple, med over 50 siffrers nøyaktighet).

ii) Nullpunktet $x^* = 0$, og

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
1	0,5000000000	$5,00 \cdot 10^{-1}$	0,54	3,69
2	0,2707470413	$2,71 \cdot 10^{-1}$	0,52	7,07
3	0,1414747338	$1,41 \cdot 10^{-1}$	0,51	13,81
4	0,0724047358	$7,24 \cdot 10^{-2}$	0,51	27,29
5	0,0366392002	$3,66 \cdot 10^{-2}$	0,50	54,26
6	0,0184314669	$1,84 \cdot 10^{-2}$	0,50	108,18
7	0,0092440432	$9,24 \cdot 10^{-3}$	0,50	216,02
8	0,0046291426	$4,63 \cdot 10^{-3}$	0,50	431,71
9	0,0023163571	$2,32 \cdot 10^{-3}$	0,50	863,09
10	0,0011586257	$1,16 \cdot 10^{-3}$		

I dette tilfellet er konvergenen lineær, med konstant $C = 0,5$. Dette skyldes at $f'(0) = 0$, så betingelsen for kvadratisk konvergens ikke er oppfylt. I stedet får vi med $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ at

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2},$$

se ligning (5) s. 105 i K&C. Dette er i overensstemmelse med de målte resultatene.

iii) Nullpunktet $x^* = 0$, og

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
1	0,5000000000	$5,00 \cdot 10^{-1}$	0,66	3,02
2	0,3309759368	$3,31 \cdot 10^{-1}$	0,66	4,55
3	0,2199738473	$2,20 \cdot 10^{-1}$	0,67	6,83
4	0,1464514253	$1,46 \cdot 10^{-1}$	0,67	10,25
5	0,0975760249	$9,76 \cdot 10^{-2}$	0,67	15,38
6	0,0650334672	$6,50 \cdot 10^{-2}$	0,67	23,07
7	0,0433505497	$4,34 \cdot 10^{-2}$	0,67	34,60
8	0,0288988576	$2,89 \cdot 10^{-2}$	0,67	51,91
9	0,0192654581	$1,93 \cdot 10^{-2}$	0,67	77,86
10	0,0128435063	$1,28 \cdot 10^{-2}$		

Igjen er konvergensen lineær, denne gangen med $C = 0,67$. Grunnen er den samme som i punkt *ii*).

- b) *i*) $x^* = \arccos(0,5) = \pi/3$, $f'(x^*) = -\sqrt{3}/2$, så dette nullpunktet har multiplisitet 1.
ii) $x^* = 0$, og $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$. Nullpunktet har multiplisitet 2.
iii) $x^* = 0$, og $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3$. Nullpunktet har multiplisitet 3.

c) Fra definisjonen av multiplisitet i oppgaven kan vi skrive

$$\mu(x) = \frac{(x - x^*)^m q(x)}{m(x - x^*)^{m-1} q(x) + (x - x^*)^m q'(x)} = (x - x^*) \frac{q(x)}{m q(x) + (x - x^*) q'(x)}.$$

Så x^* er et enkelt nullpunkt av $\mu(x)$ siden $q(x^*) \neq 0$. Newtons metode anvendt på $\mu(x)$ finnes ved

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)},$$

og denne konvergerer kvadratisk.

- d) Denne oppgaven kan du gjøre selv. Vær oppmerksom på at avrundingsfeil kan bli et problem her, siden $f(x)$ og $f'(x)$ begge går mot 0 når x_k går mot x^* .
e) Denne oppgaven er lik nok Newtons metode til at du får den til på egenhånd.

Oppgave 2

a) Vi skriver om ligningssystemet til

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

der $X = (x_1, x_2)^T$. Jacobi-matrisa blir

$$J(X) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Newtons metode kan da skrives som

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + H^{(n)},$$

der $H^{(n)}$ er gitt implisitt ved

$$J(X^{(n)})H^{(n)} = -F(X^{(n)}). \quad (1)$$

I vårt tilfelle kan vi enkelt beregne J^{-1} (f.eks. i Maple), hvilket fører til iterasjonen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2x_1(1+3x_1x_2)} \begin{bmatrix} x_1^2 + 4x_1^3x_2 + x_2^2 + 1 \\ x_1^2(3x_2^2 - x_1^2 + 3) \end{bmatrix}.$$

Normalt vil det være veldig tungvint å beregne J^{-1} slik som vi har gjort. I stedet pleier man å løse (1) numerisk, f.eks. med konjugerte gradienter-metoden. MATLAB gjør dette for oss hvis vi bruker `\`-operatoren for å løse (1).

Vi må unngå å velge startverdi der Jacobi-matrisa er singular, altså når $\det(J(X)) = 0$:

$$\det(J(X)) = -2x_1 - 6x_1^2x_2 = -2x_1(1 + 3x_1x_2) = 0.$$

Vi må holde oss vekk fra kurvene $x_1 = 0$ og $3x_1x_2 = -1$, og velger startverdier $x_1 = x_2 = 0,5$. Etter én iterasjon er $x_1 = 1$ og $x_2 = 0,5$. Etter to iterasjoner er $x_1 = 0,85$ og $x_2 = 0,55$.

- b) Se MATLAB-programmene på hjemmesiden.
- c) Som vi så i punkt a) vil Jacobi-matrisa bli singular på x_1 -aksen. Dette gjør at Newton-iterasjonen ikke gir en unik løsning, og algoritmen feiler.