TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Øving 3

Oppgave 1

a) Gitt $f(x) = \sqrt{1+x}$. La $x_0 = 0$, $x_1 = 0.9$, $x_2 = 0.6$ og $x_3 = 0.4$. Konstruer interpolasjonspolynomene av grad 1, 2 og 3 for å approksimere $f(0.45)$. Bestem den virkelige feilen i hvert tilfelle.

b) Bruk teorem 2, seksjon 6.1 i K&C til å finne en feilskranke for approksimasjonene til $f(0.45)$ i **a)**.

c) Bruk MATLAB-funksjonen `lagrange` for å finne approksimasjonene til $f(0.45)$.

Siden MATLAB likevel er startet, lag et plott av $p_3(x)$ og $f(x)$ for $x \in [0, 0.9]$. Hva skjer hvis du utvider området f.eks. til $[-0.5, 1.5]$?

Prøv også gjerne om du kan legge inn noen ekstra noder.

Oppgave 2

Verifiser at polynomene

$$p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21,$$
$$q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3$$

begge interpolerer punktene gitt i tabellen

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	6	47

Hvorfor motsier ikke dette entydighetsteoremet (teorem 1, seksjon 6.1)?

Oppgave 3

Gitt et sett med ekvidistante noder, dvs. $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$, med $h = (b - a)/n$. La $p_n(x)$ være polynomet av grad n som interpolerer en funksjon f i nodene. Oppgaven går ut på å vise feilskranken

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \tag{1}$$

hvor $M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Velg en $x \in [a, b]$, og la j være slik at $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. Vis først skranken

$$\prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \leq \frac{1}{4} h^{n+1} (j+1)!\,(n-j)!.$$

Tegn gjerne en figur. Det er nyttig å dele produktet i tre, for $k < j$, $k = j, j+1$ og $k > j+1$, og finne en øvre grense for hver av disse.

Bruk dette til å vise

$$\left|\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)\right| \leq \frac{1}{4} h^{n+1} n!.$$

Vis til sist (1).

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ på intervallet $[-3, 1]$.

a) Vis ved induksjon at

$$f^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} f(x) = 2^{m/2} \mathrm{e}^x \sin(x + m\pi/4).$$

b) La $p_n(x)$ være polynomet som interpolerer $f(x)$ i $n + 1$ ekvidistante noder (inkludert endepunktene). Finn en øvre grense for feilen, uttrykt ved n. Hva må n være for at du kan garantere en feil mindre enn 10^{-4}? (Prøv deg fram, eller regn det ut i MATLAB eller Maple).

c) Bruk MATLAB for å verifisere svarene i punkt **b)**.

Oppgave 5

Denne oppgaven skal gjøres i MATLAB.

Norges brutto produksjon av råolje fra og med 1980 til og med 2008 målt i standard kubikkmeter (Sm^3) er oppgitt i tabell 1. Finn interpolasjonspolynomet av grad 7 for punktene i tabellen.

År	Oljeproduksjon (10^6 Sm^3)
1980	30.688
1984	43.709
1988	66.882
1992	125.936
1996	177.282
2000	182.126
2004	161.064
2008	113.335

Tabell 1: Norsk oljeproduksjon 1980–2008 (kilde: SSB).

Bruk polynomet til å finne et estimat for oljeproduksjonen i 1990 (til sammenligning var oljeproduksjonen på $96.844 \cdot 10^6$ Sm^3 det året). Hva med prognoser for 2009 og 2010? Hvilke råd vil du gi politikerne?