TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Løsningsforslag øving 4

Oppgave 1

a) Tabellen over dividerte differenser blir ($f[x_i] = y_i$):

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1		
		1/2	
2	2		1/2
		2	
3	4		

og vi ender med polynomet

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$

b) Vi beholder tabellen fra **a)**, og legger bare til en rad i tabellen:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	1			
		1/2		
2	2		1/2	
		2		$-1/2$
3	4		0	
		2		
1	0			

Polynomet blir

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2) - \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 1.$$

Oppgave 2

a) Ekvidistante noder: $x_i = ih$, $i = 0, \dots, 3$ med $h = \pi/3$. Vi skal da interpolere punktene i tabellen

x_i	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
$f(x_i)$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0

Resultat:

$$p_3(x) = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi^2}(-x^2 + \pi x),$$

med feilgrense (se øving 3, oppg. 3)

$$|\sin(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \approx 0.0752$$

b) Chebyshev-nodene er gitt ved: $x_i = \pi/2 + (\pi/2)\cos\big((2i+1)\pi/8\big)$ når $n = 3$. Det gir tabellen

x_i	3.022022903	2.171914057	0.9696785970	0.119569751
$f(x_i)$	0.1192850409	0.8247039815	0.8247039818	0.1192850413

Polynomet blir

$$p_3(x) = -0.4043173324\,x^2 + 1.270200363\,x - 0.0268120051$$

med feilgrense

$$|\sin(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{8 \cdot 4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \approx 3.171 \cdot 10^{-2}.$$

c) Vi har $M_n = \max_{x\in[0,\pi]}|f^{(n+1)}(x)| = 1$.

Ekvidistante noder:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+1}$$

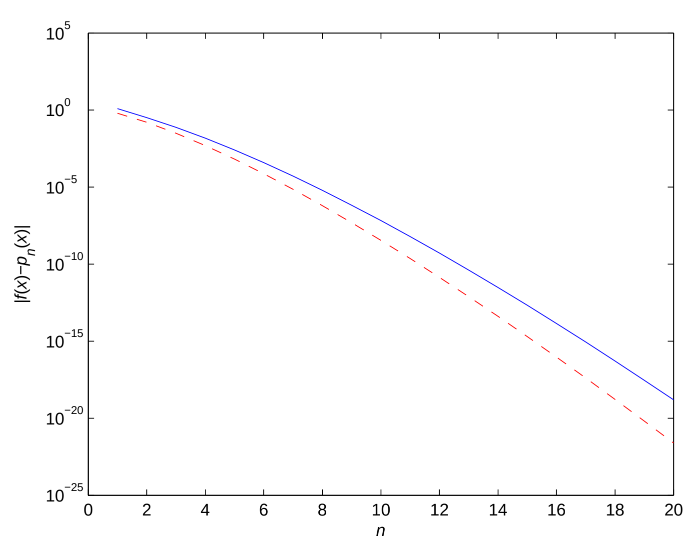
Chebyshev-noder: Variabelskiftet fører til at

$$\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(t - t_i) \qquad \Rightarrow \qquad \prod_{i=0}^{n}|x - x_i| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^n}$$

slik at feilgrensen blir:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\frac{2}{(n+1)!}.$$

Av figur 1 ser vi at Chebyshev-noder gir en lavere feilgrense enn ekvidistante noder.



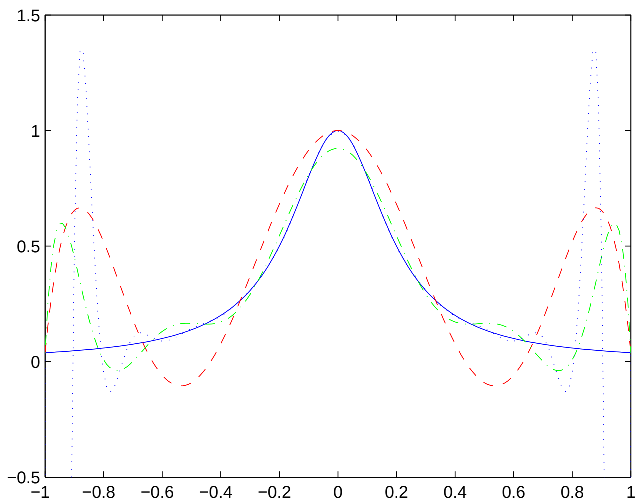
Figur 1: Heltrukken: ekvidistante noder, stiplet: Chebyshev-noder.

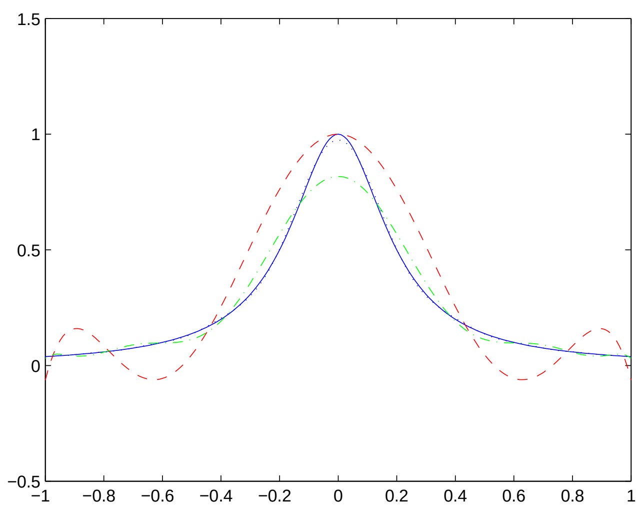
Oppgave 3

Se vedlagte MATLAB-filer.

Oppgave 4

I figur 2 ser vi at ekvidisitante noder gir katastrofalt resultat for tilnærming av Runges funksjon. Jo større vi velger n, jo større utsving får vi nær -1 og 1. Chebyshev-noder gir derimot god tilpasning i hele intervallet, og jo større vi velger n, jo bedre blir tilpasningen.





Figur 2: Øverst: ekvidistante noder, nederst: Chebyshev-noder. Heltrukken: Runges funksjon, stiplet: $n = 6$, prikket/stiplet: $n = 11$, prikket: $n = 21$.

Oppgave 5

a) Vi har: $f[x_0] = \Delta^0 f = f_0$ og $f[x_0, x_1] = (f_1 - f_0)/h$, så antakelsen er riktig for $k = 0, 1$. Vi antar nå at hypotesen er riktig for en vilkårlig k, og skal vise at den da også gjelder for $k + 1$. Vi har:

$$\begin{aligned} f[x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}] &= \frac{f[x_1, \ldots, x_{k+1}] - f[x_0, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \\ &= \frac{\frac{1}{k!h^k}(\Delta^k f_1 - \Delta^k f_0)}{(k+1)h} = \frac{1}{(k+1)!h^{k+1}} \Delta^{k+1} f_0. \end{aligned}$$

b) Siden $x = x_0 + sh$ er $x_i = x_0 + ih$, slik at

$$\prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i) = h^k \prod_{i=0}^{k-1} (s - i) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

c) Sett resultatene fra **a)** og **b)** inn i den kjente formelen

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i).$$

d) Sorter nodene i stigende rekkefølge. Vi får da følgende tabell over foroverdifferanser:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ 0 & & 3 & \\ & 2 & & -3 \\ 2 & & 0 & \\ & 2 & & \\ 4 & & & \end{array}$$

og polynomet blir

$$p(x) = p(x_0 + sh) = 1 - \binom{s}{1} + 3\binom{s}{2} - 3\binom{s}{3} = 1 - s + 3\frac{s(s-1)}{2} - 3\frac{s(s-1)(s-2)}{3!},$$

det samme polynomet som i oppgave **1b)**, siden $x_0 = 0$ og $h = 1$ i dette tilfellet.