

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Øving 4

Oppgave 1

- a) Bruk dividerte differanser og Newtons interpolasjonsformel for å finne polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene i tabellen:

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 4 \end{array}.$$

- b) Legg til punktet $(1, 0)$ til tabellen i punkt **a**). Hva blir interpolasjonspolynomet nå?

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du approksimere $\sin(x)$ på intervallet $[0, \pi]$ ved hjelp av polynominterpolasjon.

- a) Velg 4 ekvidistante noder på intervallet. Finn polynomet, og en øvre grense for feilen $|\sin(x) - p_3(x)|$.
- b) Gjenta punkt **a**), men bruk Chebyshev-noder i stedet (se hint). (Du er ikke nødt til å regne ut polynomet, men sett opp interpolasjonspunktene).
- c) I de to tilfellene (ekvidistante og Chebyshev-noder), finn et uttrykk for en øvre grense for feilen uttrykt ved n (polynomets grad). Plott feilgrensen som funksjon av n og sammenlign de to tilfellene.

Hint: Chebyshev-nodene er definert på intervallet $[-1, 1]$. For å flytte dem over på et vilkårlig intervall $[a, b]$ brukes variabelskiftet

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1, 1].$$

Feilformelen justeres tilsvarende.

Oppgave 3

Skriv to funksjoner i MATLAB, en som beregner tabellen over dividerte differanser basert på et gitt datasett, og en som beregner verdier av interpolasjonspolynomet i gitte punkter, basert på denne tabellen. F.eks.

```
function tab = divdiff(x, y)
```

og

```
function y = pval(tab, t)
```

hvor \mathbf{t} kan være en vektor.

Test funksjonene på datasettet i oppgave 1.

Oppgave 4

Gitt Runges funksjon $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $x \in [-1, 1]$. Finn og plott polynomet som interpolerer f i ekvidistante noder. Bruk $n = 6, 11$ og 21 . Bruk MATLAB-funksjonen `polyfit`. Denne funksjonen genererer et polynom av grad n som interpolerer de oppgitte datapunktene. Polynomet blir interpolasjonspolynomet hvis vi bruker $n + 1$ datapunkter og polynomgraden er n . Bruk `polyval` for å evaluere interpolasjonspolynomet på et ønsket utvalg av verdier, og plott resultatet.

Gjenta eksperimentet med Chebyshev-noder. Kommenter resultatet.

Oppgave 5

La avstanden h mellom nodene være gitt, slik $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Sett $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$

På en slik følge av f 'er kan vi definere en *foroverdifferanse* rekursivt ved

$$\Delta^0 f_0 = f_0, \quad \Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta^k f_0 = \Delta(\Delta^{k-1} f_0) = \Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Vi får da at

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0, \quad \Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0, \quad \text{osv.}$$

La $x = x_0 + sh$, der $s \in \mathbb{R}$. Oppgaven går ut på å vise at interpolasjonspolynomet som interpolerer f i nodene x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ kan skrives som

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f_0 + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \quad (1)$$

hvor

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

a) Vis ved induksjon:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0.$$

b) Vis at

$$\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = k!h^k \binom{s}{k}, \quad k \geq 1.$$

c) Bruk resultatene fra a) og b) til å vise Newtons foroverdifferanseformel (1)

d) Anvend formelen på datasettet i oppgave 1b).

Kommentar: Tilsvarende går det an å vise *Newton's bakoverdifferanseformel*. Bakoverdifferanser på følgen $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ er definert ved

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla f_n = f_n - f_{n-1}, \quad \nabla^k f_n = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Newton's bakoverdifferanseformel er gitt ved

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f_n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n.$$

Forslag til noen relevante eksamensoppgaver:

Dere som ønsker litt flere oppgaver/eksempler kan ta en titt på følgende eksamensoppgaver:

Desember 2007, oppg. 1.

Desember 2006, oppg. 1.

August 2006, oppg. 2.

August 2005, oppg. 2.