TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Løsningsforslag øving 6

Oppgave 1

La $R(n-1,0) = T(2h)$ og $R(n,0) = T(h)$, med $m = 2^n$, $h = (b-a)/m$, og

$$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_m)\right), \qquad x_i = a + ih, i = 0, \dots, m.$$

Rekursiv trapes gir

$$T(h) = \frac{T(2h)}{2} + h\sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}).$$

Romberg-algoritmen gir

$$\begin{aligned} R(n,1) = \frac{4}{3}R(n,0) - \frac{1}{3}R(n-1,0) &= \frac{4}{3}\left(\frac{T(2h)}{2} + h\sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1})\right) - \frac{T(2h)}{3} \\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}) + f(x_m)\right). \end{aligned}$$

Oppgave 2

Det blir ikke gitt noe løsningsforslag for denne oppgaven. Se eksamen 2008, oppg. 2.

Oppgave 3

La $T_1 = T(a,b) = (b-a)\big(f(a)+f(b)\big)/2$, og $T_2 = T(a,c) + T(c,b)$, der $c = (a+b)/2$. Vi vet at

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= T_1 - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi_1), \\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= T_2 - \frac{(b-a)^3}{12\cdot 2^3}\left(f''(\eta_1) + f''(\eta_2)\right), \end{aligned}$$

der $\xi_1 \in (a,b)$, $\eta_1 \in (a,c)$ og $\eta_2 \in (c,b)$. Antar vi at $f''(x)$ endrer seg lite over intervallet (a,b), kan vi bruke samme argumentasjon som for adaptive Simpson, dvs. et passende feilestimat for T_2 er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_2 \approx \mathcal{E}(a,b) = \frac{1}{3}(T_2 - T_1).$$

Den adaptive trapesalgoritmen blir da:

function ADAPTIV-TRAPES(f, a, b, tol)
    $T_1 \leftarrow T(a, b)$ $\qquad\qquad \triangleright\ T(a,b) = (b-a)\big(f(a)+f(b)\big)/2$
    $c \leftarrow (a+b)/2$
    $T_2 \leftarrow T(a,c) + T(c,b)$
    $\mathcal{E} \leftarrow (T_2 - T_1)/3$
    if $|\mathcal{E}| \le tol$ **then**
        return T_2
    else
        $T_l \leftarrow$ ADAPTIV-TRAPES$(f, a, c, tol/2)$
        $T_r \leftarrow$ ADAPTIV-TRAPES$(f, c, b, tol/2)$
        return $T_l + T_r$
    end if
end function

Algoritmen anvendt på integralet i oppgaven gir:

<table>
<tr><td colspan="4">$tol = 2 \cdot 10^{-3},\ a = 0{,}0,\ b = 0{,}8$
$T_1 = 0{,}23888,\ T_2 = 0{,}18317,\ \mathcal{E} = -1{,}86 \cdot 10^{-2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$tol = 1 \cdot 10^{-3}\ a = 0{,}0,\ b = 0{,}4$
$T_1 = 0{,}031864,\ T_2 = 0{,}0239330$
$\mathcal{E} = -2{,}6 \cdot 10^{-3}$</td><td colspan="2">$tol = 1 \cdot 10^{-3}\ a = 0{,}4,\ b = 0{,}8$
$T_1 = 0{,}15130,\ T_2 = 0{,}14611$
$\mathcal{E} = -1{,}7 \cdot 10^{-3}$</td></tr>
<tr><td>$tol = 5 \cdot 10^{-4}$
$a = 0{,}0,\ b = 0{,}2$
$T_1 = 0{,}004000$
$T_2 = 0{,}003000$
$\mathcal{E} = -3{,}3 \cdot 10^{-4}$</td><td>$tol = 5 \cdot 10^{-4}$
$a = 0{,}2,\ b = 0{,}4$
$T_1 = 0{,}019931$
$T_2 = 0{,}018953$
$\mathcal{E} = -3{,}3 \cdot 10^{-4}$</td><td>$tol = 5 \cdot 10^{-4}$
$a = 0{,}4,\ b = 0{,}6$
$T_1 = 0{,}051159$
$T_2 = 0{,}050320$
$\mathcal{E} = -2{,}8 \cdot 10^{-4}$</td><td>$tol = 5 \cdot 10^{-4}$
$a = 0{,}6,\ b = 0{,}8$
$T_1 = 0{,}094947$
$T_2 = 0{,}094536$
$\mathcal{E} = -1{,}4 \cdot 10^{-4}$</td></tr>
</table>

Så
$$T = 0{,}003 + 0{,}018953 + 0{,}050320 + 0{,}094536 = 0{,}1668.$$

Oppgave 4

a)
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \approx \frac{\mathrm{e}^{-1/\sqrt{3}}}{\sqrt{1-1/3}} + \frac{\mathrm{e}^{1/\sqrt{3}}}{\sqrt{1-1/3}} = \sqrt{6}\cosh(1/\sqrt{3}) \approx 2{,}8692$$

b) Bruk indreproduktet $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1}\big(f(x)g(x)/\sqrt{1-x^2}\big)\,\mathrm{d}x$, med Chebyshev-polynomene som ortogonale polynomer. Vi velger $n = 1$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, dvs. $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$. Vektene blir
$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\big(x - 1/\sqrt{2}\big)}{\big(-1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\big)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$
$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\big(x + 1/\sqrt{2}\big)}{\big(1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\big)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Approksimasjonen blir $\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}} + \mathrm{e}^{1/\sqrt{2}}) \approx 3{,}9603$ som er en vesentlig forbedring fra **a)**.

c) Feilen er gitt ved

$$E = K \cdot f^{(4)}(\nu), \qquad K = \frac{1}{4!} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{192}.$$

Siden $|\mathrm{e}^x| < \mathrm{e}$ på $(-1,1)$, må $|E| < \mathrm{e}\pi/192 \approx 0{,}044$. Til sammenligning er målt feil 0,017.

Oppgave 5

Rekursjonsformelen fra notatet gir

$$\begin{array}{lll}
\phi_0(x) = 1, & \langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 & \\
 & \langle x\phi_0, \phi_0 \rangle = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x\,\mathrm{d}x = 1 & \Rightarrow B_1 = 1 \\
\phi_1(x) = x - 1, & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}(x-1)^2\,\mathrm{d}x = 1 & \\
 & \langle x\phi_1, \phi_1 \rangle = 3 & \Rightarrow B_2 = 3, C_2 = 1
\end{array}$$

$$\phi_2(x) = (x-3)\phi_1(x) - \phi_0(x) = x^2 - 4x + 3 - 1 = x^2 - 4x + 2$$

Oppgave 6

Vi må vise at

$$\int_{-1}^{1} \left(\left(x^2-1\right)^k \right)^{(k)} \left(\left(x^2-1\right)^j \right)^{(j)} \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{for alle } j < k.$$

Delvis integrasjon, $\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$ med

$$u = \left(\left(x^2-1\right)^j \right)^{(j)}, \qquad \mathrm{d}v = \left(\left(x^2-1\right)^k \right)^{(k)} \mathrm{d}x$$

anvendt på integralet over gir

$$\left(\left(x^2-1\right)^k \right)^{(k-1)} \left(\left(x^2-1\right)^j \right)^{(j)} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(\left(x^2-1\right)^k \right)^{(k-1)} \left(\left(x^2-1\right)^j \right)^{(j+1)} \mathrm{d}x.$$

Det første leddet er lik null (se hintet). Vi bruker så delvis integrasjon en gang til på integralet. Etter å ha gjort dette totalt $j+1$ ganger, ender vi med

$$(-1)^{j+1} \int_{-1}^{1} \left(\left(x^2-1\right)^k \right)^{(k-j-1)} \left(\left(x^2-1\right)^j \right)^{(2j+1)} \mathrm{d}x = 0$$

siden $\left(\left(x^2-1\right)^j \right)^{(2j+1)} = 0$.