TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Øving 6

Oppgave 1

Vis at andre kolonne i Romberg-tabellen er det samme som du får ved å bruke sammensatt Simpsons formel.

Oppgave 2

Skriv et MATLAB-program som regner ut Romberg-tabellen for et gitt integral. Stopp når $|R(n,n) - R(n-1,n-1)| \leq tol$, der tol er toleransen gitt av brukeren. Test programmet på integralene

$$\int_0^1 \sin(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kommenter svaret. (Se også eksamen 2008, oppg. 2).

Oppgave 3

Konstruer en adaptiv trapesalgoritme. Anvend algoritmen til å finne verdien av *Fresnel-integralet*

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

for $x = 0{,}8$. Bruk $tol = 2 \cdot 10^{-3}$.

Oppgave 4

a) Finn en tilnærmelse til integralet

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

ved bruk av et Gauss-kvadratur med $n = 1$ (to noder). Bruk Gauss-kvadraturet basert på Legendre-polynomene.

b) Finn et Gauss-kvadratur på formen

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

og bruk denne til å regne ut integralet i punkt **a)**. Sammenlign med eksakt løsning.

c) Finn en øvre grense for feilen i **b)**.

Oppgave 5

Finn de første tre Laguerre-polynomene, dvs. polynomer som er ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} p(x) q(x) \, \mathrm{d}x.$$

Oppgave 6

Vis at polynomene definert ved

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2^k \, k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(x^2 - 1)^k \right]$$

er ortogonale mhp. indreproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hint: Legg merke til at den j-te deriverte av $(x^2 - 1)^k$ er delelig med $(x^2 - 1)$ dersom $j < k$. Bruk dessuten delvis integrasjon gjentatte ganger.

Relevante eksamensoppgaver:

- Desember 2008, oppg. 3,
- Desember 2007, oppg. 3,
- Desember 2006, oppg. 2,
- August 2006, oppg. 3.