TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2010

Øving 7

Oppgave 1

Gitt en ordinær differensialligning

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}. \tag{1}$$

Du kan anta at f tilfredsstiller Lipschitz-betingelsen

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

En *én-skrittsmetode* for å løse denne differensialligningen kan beskrives ved

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, \quad h = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N} \tag{2}$$

Anta følgende:

- Den lokale avbruddsfeilen gitt ved

  $$d_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi\big(t_n, y(t_n); h\big)$$

  tilfredsstiller

  $$\|d_{n+1}\| \leq Dh^{p+1}$$

  der D er en positiv konstant.

- Funksjonen Φ er Lipschitz-kontinuerlig, med Lipschitz-konstant M, dvs.

  $$\|\Phi(t_n, y; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}; h)\| \leq M\|y - \tilde{y}\|. \tag{3}$$

a) Vis at i så fall tilfredsstiller den globale feilen i t_{end}

$$\|e_N\| = \|y(t_{\text{end}}) - y_N\| \leq Ch^p,$$

der C er en positiv konstant som avhenger av M, D og intervallet $t_{\text{end}} - t_0$.

b) Anta at en eksplisitt Runge–Kutta-metode i 2 nivåer, gitt ved Butcher-tablået

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & c_2 & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

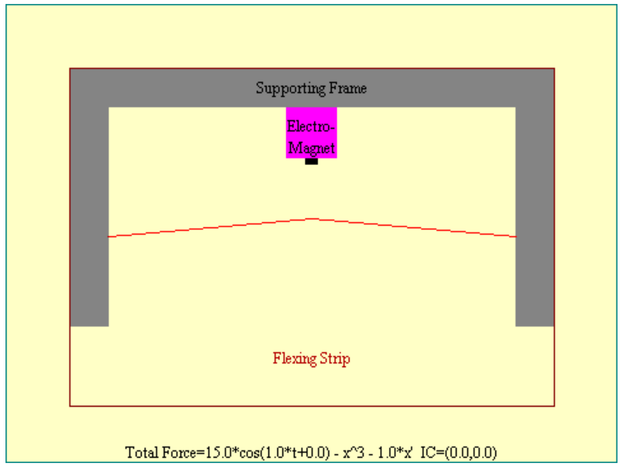
blir brukt til å løse (1). Vis at metoden kan skrives på formen (2). Anta nå at $h \leq h_{\max}$ og vis at Φ oppfyller Lipschitz-betingelsen i y, med en Lipschitz-konstant M som avhenger av metodekoeffisientene c_2, b_1 og b_2, og av L og $h_{\max}$.

Oppgave 2

En mye studert matematisk modell er Duffing-oscillatoren. Denne kan beskrives ved startverdiproblemet

$$u'' + ku' - u(1 - u^2) = A\cos(\omega t). \quad (4)$$

G. Duffing brukte i 1918 denne ligningen til å beskrive en tynn, bøyelig metallstav som svinger i nærheten av en elektromagnet. Konstanten k er dempingen, mens ω og A beskriver henholdsvis frekvens og amplitude til pådraget fra elektromagneten. Se `http://www.mcasco.com/pattr1.html` for flere detaljer.



a) Begynn med å skrive om (4) til et system av to førsteordens differensialligninger.

b) Gjør en håndregning (dvs. kalkulator er lov) av ett skritt med forbedret Eulers metode (også kalt Heuns metode) der du setter $k = 0{,}25$, $A = 0{,}4$, $\omega = 1{,}0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, og bruk skrittlengde $h = 0{,}1$.

c) Implementer forbedret Eulers metode i MATLAB og bruk den til å løse (4).

d) Lag plott av første komponent u langs x-aksen og andre komponent u' langs y-aksen (dette kalles et *faseplott*). Begynn med de samme parametrene som i **b)**, men varier etterhvert og se hva som skjer. I dette punktet kan du bruke $h = 0{,}01$. Forsøk å integrere over ganske lang tid.

e) Forsøk å kjøre gjennom med mange forskjellige startverdier, og plott de resulterende integralkurver for å få et bilde av hvordan integralkurvene ser ut. Du kan bruke samme verdier som ovenfor for $k = 0{,}25$, $A = 0{,}4$, $\omega = 1{,}0$.

f) Lag til slutt en implementasjon der du bytter ut forbedret Euler med RK4. Sammenlign resultatene.

Oppgave 3

Kuttas metode fra 1901 er den mest berømte av alle eksplisitte Runge–Kutta-par, gitt ved følgende Butcher-tabell:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

a) Verifiser at metoden har orden 4 ved å sjekke alle de 8 ordensbetingelsene.

b) En besnærende tanke er nå å finne et nytt sett med vekter, si $\hat{b}_s$ slik at den tilhørende metoden får orden 3, til bruk for feilestimering og skrittlengdekontroll. Forsøk å finne et slikt sett med $\hat{b}_s$.

Oppgave 4

a) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med s nivåer maksimalt kan være av orden s. (Hint: Bruk $y' = y$, $y(0) = y_0$ som testligning.)

b) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med 3 nivåer av orden 3 må oppfylle

$$3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2 = 0.$$

c) Karakteriser alle eksplisitte Runge–Kutta-metoder med 3 nivåer av orden 3 som oppfyller $a_{31} = 0$, dvs. $a_{32} = c_3$. Hvor mange frie parametre fins?

d) Bestem alle eksplisitte metoder av orden 2 som har samme koeffisienter a_{ij} som metoden ovenfor, og vekter som samtidig oppfyller $\hat{b}_3 = 0$.

Oppgave 5

a) Finn egenverdiene til matrisa

$$M = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 40 & -10 \end{pmatrix}.$$

b) Anta at du skal løse differensialligningen

$$y' = My, \qquad y(0) = y_0$$

ved hjelp av forbedret Eulers metode. Hva er den største skrittlengden h_{max} du kan bruke?

c) Løs ligningen

$$y' = My + g(t), \qquad 0 \le t \le 10$$

med

$$g(t) = \big(\sin(t), \cos(t)\big)^{\mathrm{T}}, \qquad y(0) = \left(\frac{5210}{249401}, \frac{20259}{249401}\right)^{\mathrm{T}}$$

ved bruk av `impEuler.m`. Velg skrittlengder litt mindre enn og litt større enn h_{max}. Hva observerer du?

Oppgave 6

Den lineære testligningen

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = y_0$$

har løsningen $y(h) = \mathrm{e}^z y_0$ der $z = \lambda h$. Et skritt med en Runge–Kutta-metode gir $y_1 = R(z)y_0$. Dermed kan vi betrakte stabilitetsfunksjonen $R(z)$ som en tilnærmelse til e^z. Vil $R(z)$ vokse (i absoluttverdi) raskere enn e^z? Dette kan vi finne ut ved å studere når $|R(z)/\mathrm{e}^z| > 1$.

Skriv om skriptet `stab.m` til å plotte området

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)/\mathrm{e}^z| > 1\}.$$

Beregn stabilitetsfunksjonen for noen av Runge–Kutta-metodene du kjenner og finn $\mathcal{A}$ for disse. Du kan også tegne området for stabilitetsfunksjonene for Gauss–Legendre-metodene (kollokasjonsmetoder av orden $2s$). Disse er gitt ved:

$$\begin{aligned}
s &= 1, \qquad & R(z) &= \frac{1 + z/2}{1 - z/2}, \\
s &= 2, \qquad & R(z) &= \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12}, \\
s &= 3, \qquad & R(z) &= \frac{1 + z/2 + z^2/10 + z^3/120}{1 - z/2 + z^2/10 - z^3/120}.
\end{aligned}$$

Området $\mathcal{A}$ kalles en *ordensstjerne*.