TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

a) Vi vil vise at feilen oppfyller

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^q} = C.$$

i) Nullpunktet $x^\star = \arccos 0{,}5 \approx 1{,}0471975512$, og

k	x_k	$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_{k+1}\rvert/\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_{k+1}\rvert/\lvert e_k\rvert^2$
0	0,5000000000	$5{,}47\cdot 10^{-1}$	$4{,}39\cdot 10^{-1}$	0,803
1	1,2875729002	$2{,}40\cdot 10^{-1}$	$4{,}44\cdot 10^{-2}$	0,185
2	1,0578736992	$1{,}07\cdot 10^{-2}$	$3{,}03\cdot 10^{-3}$	0,283
3	1,0472298506	$3{,}23\cdot 10^{-5}$	$9{,}32\cdot 10^{-6}$	0,287
4	1,0471975514	$3{,}01\cdot 10^{-10}$	$8{,}69\cdot 10^{-11}$	0,287
5	1,0471975512	$2{,}62\cdot 10^{-20}$	$7{,}56\cdot 10^{-21}$	0,287
6	1,0471975512	$1{,}98\cdot 10^{-40}$		

Vi har som forventet kvadratisk konvergens, dvs. $q = 2$, med $C = 0{,}287$ (i dette tilfellet er beregningene gjort i Maple, med over 50 siffers nøyaktighet).

ii) Nullpunktet $x^\star = 0$, og

k	x_k	$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_{k+1}\rvert/\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_{k+1}\rvert/\lvert e_k\rvert^2$
1	0,5000000000	$5{,}00\cdot 10^{-1}$	0,54	3,69
2	0,2707470413	$2{,}71\cdot 10^{-1}$	0,52	7,07
3	0,1414747338	$1{,}41\cdot 10^{-1}$	0,51	13,81
4	0,0724047358	$7{,}24\cdot 10^{-2}$	0,51	27,29
5	0,0366392002	$3{,}66\cdot 10^{-2}$	0,50	54,26
6	0,0184314669	$1{,}84\cdot 10^{-2}$	0,50	108,18
7	0,0092440432	$9{,}24\cdot 10^{-3}$	0,50	216,02
8	0,0046291426	$4{,}63\cdot 10^{-3}$	0,50	431,71
9	0,0023163571	$2{,}32\cdot 10^{-3}$	0,50	863,09
10	0,0011586257	$1{,}16\cdot 10^{-3}$		

I dette tilfellet er konvergensen lineær, med konstant $C = 0{,}5$. Dette skyldes at $f'(0) = 0$, så betingelsen for kvadratisk konvergens ikke er oppfylt. I stedet får vi med $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ at

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2},$$

se ligning **(5)** s. 105 i K&C. Dette er i overensstemmelse med de målte resultatene.

iii) Nullpunktet $x^\star = 0$, og

k	x_k	$\|e_k\|$	$\|e_{k+1}\|/\|e_k\|$	$\|e_{k+1}\|/\|e_k\|^2$
1	0,5000000000	$5{,}00 \cdot 10^{-1}$	0,66	3,02
2	0,3309759368	$3{,}31 \cdot 10^{-1}$	0,66	4,55
3	0,2199738473	$2{,}20 \cdot 10^{-1}$	0,67	6,83
4	0,1464514253	$1{,}46 \cdot 10^{-1}$	0,67	10,25
5	0,0975760249	$9{,}76 \cdot 10^{-2}$	0,67	15,38
6	0,0650334672	$6{,}50 \cdot 10^{-2}$	0,67	23,07
7	0,0433505497	$4{,}34 \cdot 10^{-2}$	0,67	34,60
8	0,0288988576	$2{,}89 \cdot 10^{-2}$	0,67	51,91
9	0,0192654581	$1{,}93 \cdot 10^{-2}$	0,67	77,86
10	0,0128435063	$1{,}28 \cdot 10^{-2}$		

Igjen er konvergensen lineær, denne gangen med $C = 0{,}67$. Grunnen er den samme som i punkt *ii)*.

b) *i)* $x^\star = \arccos(0{,}5) = \pi/3$, $f'(x^\star) = -\sqrt{3}/2$, så dette nullpunktet har multiplisitet 1.
ii) $x^\star = 0$, og $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$. Nullpunktet har multiplisitet 2.
iii) $x^\star = 0$, og $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3$. Nullpunktet har multiplisitet 3.

c) Fra definisjonen av multiplisitet i oppgaven kan vi skrive

$$\mu(x) = \frac{(x - x^\star)^m q(x)}{m(x - x^\star)^{m-1} q(x) + (x - x^\star)^m q'(x)} = (x - x^\star)\frac{q(x)}{mq(x) + (x - x^\star)q'(x)}.$$

Så $x^\star$ er et enkelt nullpunkt av $\mu(x)$ siden $q(x^\star) \neq 0$. Newtons metode anvendt på $\mu(x)$ finnes ved

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)},$$

og denne konvergerer kvadratisk.

d) Denne oppgaven kan du gjøre selv. Vær oppmerksom på at avrundingsfeil kan bli et problem her, siden $f(x)$ og $f'(x)$ begge går mot 0 når x_k går mot $x^\star$.

e) Denne oppgaven er lik nok Newtons metode til at du får den til på egenhånd.

Oppgave 2

a) Vi skriver om ligningssystemet til

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

der $X = (x_1, x_2)^T$. Jacobi-matrisa blir

$$J(X) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Newtons metode kan da skrives som

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + H^{(n)},$$

der $H^{(n)}$ er gitt implisitt ved

$$J(X^{(n)})H^{(n)} = -F(X^{(n)}). \tag{1}$$

I vårt tilfelle kan vi enkelt beregne J^{-1} (f.eks. i Maple), hvilket fører til iterasjonen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2x_1(1+3x_1x_2)} \begin{bmatrix} x_1^2 + 4x_1^3x_2 + x_2^2 + 1 \\ x_1^2(3x_2^2 - x_1^2 + 3) \end{bmatrix}.$$

Normalt vil det være veldig tungvint å beregne J^{-1} slik som vi har gjort. I stedet pleier man å løse (1) numerisk, f.eks. med konjugerte gradienter-metoden. MATLAB gjør dette for oss hvis vi bruker \-operatoren for å løse (1).

Vi må unngå å velge startverdi der Jacobi-matrisa er singulær, altså når $\det\bigl(J(X)\bigr) = 0$:

$$\det\bigl(J(X)\bigr) = -2x_1 - 6x_1^2x_2 = -2x_1(1+3x_1x_2) = 0.$$

Vi må holde oss vekk fra kurvene $x_1 = 0$ og $3x_1x_2 = -1$, og velger startverdier $x_1 = x_2 = 0{,}5$. Etter én iterasjon er $x_1 = 1$ og $x_2 = 0{,}5$. Etter to iterasjoner er $x_1 = 0{,}85$ og $x_2 = 0{,}55$.

b) Se MATLAB-programmene på hjemmesiden.

c) Som vi så i punkt **a)** vil Jacobi-matrisa bli singulær på x_1-aksen. Dette gjør at Newton-iterasjonen ikke gir en unik løsning, og algoritmen feiler.

Oppgave 3

a) Vi begynner med $N = 2$, og skriver

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Nå er

$$\begin{aligned}\det(A+\varepsilon F) &= (a_{11}+\varepsilon f_{11})(a_{22}+\varepsilon f_{22}) - (a_{12}+\varepsilon f_{12})(a_{21}+\varepsilon f_{21}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \varepsilon(a_{11}f_{22} + a_{22}f_{11} - a_{12}f_{21} - a_{21}f_{12}) \\ &\quad + \varepsilon^2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}).\end{aligned}$$

Vi ser altså at $\det(A+\varepsilon F)$ er et andregradspolynom i ε. Vi kan ved induksjon bevise at tilsvarende gjelder for alle $N \geq 2$.

Anta at hvis $\tilde{A}$ og $\tilde{F}$ er $(N-1)\times(N-1)$-matriser, så er $\det(\tilde{A}+\varepsilon\tilde{F})$ et polynom av grad $N-1$ i ε. Betrakt nå $N\times N$-matrisene A og F. Vi skriver ut determinanten til $B = A+\varepsilon F$ ved Laplace' formel. [1]

$$\begin{aligned}\det B &= b_{11}\mathrm{Cof}(b_{11}) - b_{12}\mathrm{Cof}(b_{12}) + \cdots + (-1)^{1+N} b_{1N}\mathrm{Cof}(b_{1N}) \\ &= (a_{11}+\varepsilon f_{11})\mathrm{Cof}(b_{11}) - \cdots + (-1)^{1+N}(a_{1N}+\varepsilon f_{1N})\mathrm{Cof}(b_{1N})\end{aligned}$$

Kofaktorene $\mathrm{Cof}(b_{ij})$ er determinantene til matrisene som oppstår ved å slette rad i og kolonne j fra B. Disse matrisene er $(N-1)\times(N-1)$-matriser på formen $\tilde{A}+\varepsilon\tilde{F}$, så determinantene er etter induksjonshypotesen polynomer av grad $N-1$. Dermed er hvert ledd i summen et polynom av grad N, og $\det B = \det(A+\varepsilon F)$ er også det.

Vi noterer også at om vi setter $\varepsilon = 0$ får vi $\det A$. Polynomer er kontinuerlige, så det følger at hvis $\det A \neq 0$, så finnes det også en $\delta > 0$ slik at $\det A + \varepsilon F \neq 0$ for alle $0 < \varepsilon < \delta$.

b) Fra Cramers regel har vi at

$$x_i(\varepsilon) = \frac{D_i(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

hvor $D(\varepsilon) = \det(A+\varepsilon F)$ og $D_i(\varepsilon)$ er determinanten til matrisen som oppstår når kolonne i i $A+\varepsilon F$ erstattes av $b+\varepsilon v$. Vi ser at begge disse determinantene er på formen som ble betraktet i punkt **a)**, og er derfor polynomer i ε av grad N. I **a)** har vi også vist at $D(\varepsilon)$ er ulik 0 for små ε, så $x_i(\varepsilon)$ er kontinuerlige og deriverbare for små ε.

[1] Også kalt kofaktorekspansjon.