

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

Øving 1

Det forventes at du har lest 1.4, 1.5 og 4.3 i S&M.

Oppgave 1

a) Anvend Newtons metode på ligningen $f(x) = 0$ der

i) $f(x) = \cos x - 1/2$, med $x_0 = 0,5$.

ii) $f(x) = e^x - x - 1$, med $x_0 = 0,5$.

iii) $f(x) = x(1 - \cos x)$, med $x_0 = 0,5$.

I alle tre tilfellene vil iterasjonene konvergere mot et nullpunkt x^* . Mål konvergensordenen med f.eks. MATLAB i de tre tilfellene. Er resultatet i overensstemmelse med teorien? Hvis nei, kan du forklare hvorfor?

Vi sier at et nullpunkt x^* av $f(x)$ har multiplisitet m dersom det eksisterer en funksjon $q(x)$ slik at

$$f(x) = (x - x^*)^m q(x), \quad q(x^*) \neq 0,$$

noe som er tilfelle hvis og bare hvis

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

b) Hvilken multiplisitet har løsningene av de tre ligningene i punkt a)?

c) Anta at x^* er et nullpunkt med multiplisitet m av funksjonen $f(x)$. Vis at funksjonen

$$\mu(x) = f(x)/f'(x)$$

har et enkelt nullpunkt i x^* , uavhengig av m . Bruk dette til å finne et iterasjonsskjema som konvergerer kvadratisk mot x^* .

d) Test det nye skjemaet på funksjonene *ii)* og *iii)* i a).

e) Gjenta så oppgaven med sekantmetoden i stedet for Newtons metode.

Oppgave 2

Betrakt ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1, \\x_1^3 - x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Denne har to løsninger, én i området $-1 \leq x_1, x_2 \leq 0$ og én i $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

- Velg passende startverdier og gjør to iterasjoner for hånd med Newtons metode.
- Verifiser at du får riktig svar ved hjelp av MATLAB.
- Forklar hva som skjer hvis du velger startverdi liggende på x_2 -aksen.

Oppgave 3

Betrakt det lineære ligningssystemet $Ax = b$, hvor A er en $N \times N$ matrise, $x, b \in \mathbf{R}^N$ og $\det(A) \neq 0$. La $x(\varepsilon)$ være løsningen av det perturberte ligningssystemet

$$(A + \varepsilon F)x(\varepsilon) = (b + \varepsilon v),$$

hvor $\varepsilon > 0$ er liten, F en $N \times N$ matrise og $v \in \mathbf{R}^N$.

- Vis at hvis ε er tilstrekkelig liten og $\det(A) \neq 0$ så er $\det(A + \varepsilon F) \neq 0$, slik at løsningen $x(\varepsilon)$ av det perturberte ligningssystemet eksisterer og er unik.
Hint. Vis først at $\det(A + \varepsilon F)$ er et polynom av grad N i ε . Se hva som skjer når $\varepsilon \rightarrow 0$. Begynn med tilfellet $N = 2$.
- Vis at komponentene av $x(\varepsilon)$ er kontinuerlige funksjoner av ε og er deriverbare i 0.
Hint. Du kan bruke Cramers regel til å uttrykke komponentene av $x(\varepsilon)$ som kvotienter mellom determinanter av matriser, og observere at disse determinantene er polynomer av grad N i ε . Prøv først med $N = 2$.