

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

Løsningsforslag øving 2

Oppgave 1

Vi bruker følgen fra definisjon 1.4 med $\varepsilon_k = |x_k - 0| = x_k$.

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1}}{x_k} &= \frac{2^{-(k+1)\alpha}}{2^{-k\alpha}} \\ &= 2^{k\alpha - (k+1)\alpha}\end{aligned}$$

Vi ser på eksponenten og skriver om ved hjelp av den generaliserte binomialrekken

$$\begin{aligned}k^\alpha - (k+1)^\alpha &= k^\alpha - k^\alpha \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha \\ &= k^\alpha - k^\alpha \left(1 + \alpha k^{-1} + \binom{\alpha}{2} k^{-2} + \dots\right) \\ &= -\alpha k^{\alpha-1} - \binom{\alpha}{2} k^{\alpha-2} - \dots\end{aligned}$$

Rekken konvergerer for $k > 1$, og vi ser at den dominerende termen når $k \rightarrow \infty$ er $-\alpha k^{\alpha-1}$. Derfor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^\alpha - (k+1)^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha < 1, \\ -1, & \alpha = 1, \\ -\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Siden 2^x er kontinuert for alle $x \in \mathbb{R}$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$, får vi

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} 1, & \alpha < 1, \\ \frac{1}{2}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

I følge definisjonen konvergerer (x_k) sublineært for $\alpha < 1$, lineært for $\alpha = 1$ og superlineært for $\alpha > 1$.

Oppgave 2

I følge notatet om ikke-lineære ligninger er det tilstrekkelig å vise de to betingelsene

$$G(D) \subseteq D \tag{1}$$

$$\max_i \sum_{j=1}^3 \bar{g}_{ij} < 1, \quad \text{der} \quad \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \bar{g}_{ij} \quad \text{for } x \in D. \tag{2}$$

Det er forholdsvis lett å se at:

$$\begin{aligned}
 g_1(1, 1, x_3) &\approx 0,34 < g_1(x_1, x_2, x_3) \leq 0,5 = g_1(0, x_2, x_3) \\
 g_2(0, x_2, -1) &\approx -0,048 < g_2(x_1, x_2, x_3) < 0,09 \approx g_2(1, x_2, 1) \\
 g_3(-1, 1, x_3) &\approx -0,61 < g_3(x_1, x_2, x_3) < -0,49 \approx g_3(1, 1, x_3)
 \end{aligned}$$

så (1) er oppfylt. Likeledes kan vi vise at

$$\begin{array}{ccc}
 \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| < 0,281 & \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| < 0,281 & \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \right| = 0 \\
 \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| < 0,067 & \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| = 0 & \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right| < 0,119 \\
 \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right| < 0,136 & \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \right| < 0,136 & \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right| = 0
 \end{array}$$

for alle $x \in D$. Det betyr at

$$\max_i \sum_{j=1}^3 \bar{g}_{ij} = \max\{0,562, 0,186, 0,272\} = 0,562 < 1$$

så betingelse (2) er også oppfylt. Test dette selv numerisk.

Oppgave 3

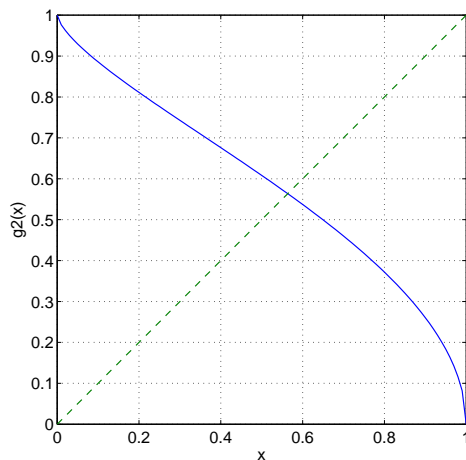
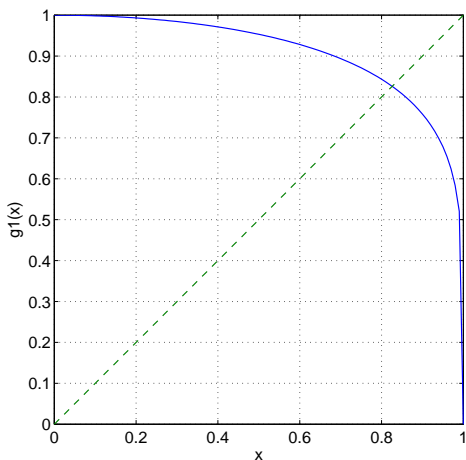
Fikspunktiterasjonene er gitt ved

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k+1)} &= \sqrt[3]{x_2^{(k)}} & x_1^{(k+2)} &= \sqrt[6]{1 - [x_1^{(k)}]^2} \\
 x_2^{(k+1)} &= \sqrt{1 - [x_1^{(k)}]^2} & x_2^{(k+2)} &= \sqrt{1 - [x_2^{(k)}]^{2/3}}
 \end{aligned}$$

så vi kan egentlig se på dette som fikspunktiterasjoner på to skalare ligninger, med formulerin-
gene

$$x = g_1(x) = \sqrt[6]{1 - x^2}, \quad x = g_2(x) = \sqrt{1 - x^{2/3}}.$$

Start med å lokalisere fikspunktene. Det kan gjøres ved å lage et enkelt plott:



Dette viser at g_1 har et fikspunkt nær 0,8, og g_2 et nær 0,5. For hver av disse trenger vi å finne et intervall $[a, b]$ slik at *i)* $g_i([a, b]) \subseteq [a, b]$ og *ii)* $|g'_i(x)| < 1$ for $x \in [a, b]$.

La oss se på g_1 først. Vi ser at

$$g'_1(x) = -\frac{x}{3(1-x^2)^{5/6}}, \quad |g'(x)| < 1 \text{ for } 0 \leq x \leq 0,87.$$

Men dette intervallet tilfredsstiller ikke *i)*. Imidlertid er g_1 monotont avtagende. Etter litt prøving og feiling finner vi at

$$g_1([0.76, 0.87]) \subseteq [0.76, 0.87].$$

Tilsvarende kan vi vise at de to betingelsene er oppfylt for g_2 på intervallet $[0.22, 0.80]$. Vi har altså vist at ligningen har et entydig fikspunkt på området

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0.76 \leq x_1 \leq 0.87, 0.22 \leq x_2 \leq 0.80\}$$

og iterasjonene konvergerer for all startverdier i dette området.

Oppgave 4

Skriv opp iterasjonsskjemaet på formen

$$Q\mathbf{x}^{(k+1)} = (Q - A)\mathbf{x}^{(k)} + b$$

der

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad (Q - A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{x}^{(k)} = [x_k, y_k, z_k]^T$. Finn $T = Q^{-1}(Q - A)$ og A , og vis at $\|T\|_\infty = 0,75$. Da konvergerer iterasjonsskjemaet for alle startverdier. Videre har vi at $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, hvor \mathbf{x} er løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = b$. Den eksakte løsningen er $\mathbf{x} = [1/9, 1/9, -4/3]$. Denne kan finnes ved å iterere til konvergens, eller ved å løse ligningssystemet med Gauss-eliminasjon.

Ved å bruke teorem 1.1 fra notatet om ikke-lineære ligninger, med $D = \mathbb{R}^3$ og $L = \|T\|_\infty$ får vi

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{\|T\|_\infty^k}{1 - \|T\|_\infty} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-4}.$$

Gjør én iterasjon for å finne $\mathbf{x}^{(1)}$, sett inn for $\|T\|_\infty$, og du ser at etter 37 iterasjoner er feilen liten nok. Slike feilgrenser er stort sett alltid svært konservative, og antagelig kan en klare seg med færre iterasjoner.

Oppgave 5

a)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 0,5 \\ 1,26 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 1,06 \\ 1,06 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ 1,03333 \\ 0,98267 \end{bmatrix}$$

Iterasjonene konvergerer, noe som stemmer med det faktum at systemet er strengt diagonaldominant.

b)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ -5,3 \\ -17,3 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 9,20 \\ -115,1 \\ -339,1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 153,07 \\ -2155,7 \\ -6317,0 \end{bmatrix}$$

Iterasjonene divergerer. Du kan regne ut spektralradien til iterasjonsmatrisen i MATLAB, den er $\rho(T) = 18,58$, noe som utvilsomt medfører divergens.

Legg merke til at ligningssystemet er det samme, vi har bare byttet om rekkefølgen til ligningene.

Oppgave 6

Se løsningsforslaget til eksamensoppgaven.