

# TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

## Øving 2

### Oppgave 1

Betrakt følgen

$$x_k = 2^{-k^\alpha}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

med  $\alpha > 0$ . Vi ser lett at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Bruk Definition 1.4 i S&M og diskuter konvergensten til  $(x_k)$  for ulike  $\alpha$ . Når konvergerer den lineært? Superlineært? Sublineært?

**Ekstra:** Bruk Definition 1.7 i S&M. Konvergerer følgen med orden  $q > 1$  for noen  $\alpha$ ?

### Oppgave 2

Gitt

$$G(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cos(x_1 x_2) + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3} + 1,06 - 0,1 \\ -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{bmatrix}$$

Vis at fikspunktiterasjonene  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$  konvergerer mot et unikt fikspunkt for alle startverdier  $x^{(0)}$  i  $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ .

Verifiser resultatet numerisk.

### Oppgave 3

Betrakt ligningssystemet fra forrige øving,

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1, \\x_1^3 - x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Denne har to løsninger, en i området  $-1 \leq x_1, x_2 \leq 0$  og en i  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ . Det er mulig å vise numerisk at iterasjonsskjemaet basert på formuleringen

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt[3]{x_2}, \\x_2 &= \sqrt{1 - x_1^2}\end{aligned}$$

konvergerer ved valg av passende startverdier.

Forklar hvorfor. Hvordan vil du velge startverdier?

*Hint:* Det er enklere å analysere resultater hvis du ser to påfølgende iterasjoner under ett.

### Oppgave 4

Gitt følgende iterasjonsskjema:

$$\begin{aligned}4x_{k+1} &= -x_k - y_k + z_k + 2 \\6y_{k+1} &= 2x_k + y_k - z_k - 1 \\-4z_{k+1} &= -x_k + y_k - z_k + 4\end{aligned}$$

Vis at  $\mathbf{x}^{(k)} = [x_k, y_k, z_k]^T$  konvergerer mot en grense  $\mathbf{x}$  for alle startverdier  $\mathbf{x}^{(0)}$  når  $k \rightarrow \infty$ . Finn grensen  $\mathbf{x}$ .

Hvor mange iterasjoner kreves maksimalt for at  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq 10^{-4}$  hvis  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ ? Er grensen realistisk, eller kan du antagelig klare deg med færre iterasjoner?

### Oppgave 5

Løs de to ligningssystemene med Gauss–Seidel-iterasjoner:

$$\begin{aligned}3x + y + z &= 5 \\x + 3y - z &= 3 \\3x + y - 5z &= -1\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}3x + y + z &= 5 \\3x + y - 5z &= -1 \\x + 3y - z &= 3.\end{aligned}\tag{2}$$

Bruk  $[0.1, 0.1, 0.1]^T$  som startvektor. Gjør først et par iterasjoner for hånd, deretter kan du bruke MATLAB-programmet `gs.m`.

Kommenter resultatene og se om de stemmer med teorien.

### Oppgave 6

Eksamensoppgave: Desember 2008, oppgave 5.