TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

Løsningsforslag øving 3

Oppgave 1

a) Vi setter først opp kardinalpolynomene basert på henholdvis 2, 3 og 4 punkt, der vi har valgt punktene x_0 og x_1 for førstegradspolynomet, x_0, x_1 og x_2 for andregradspolynomet, osv. Her er det selvsagt mulig å velge andre punkt. Vi får

$$\begin{aligned}
\ell_0^1(x) &= \frac{x-0.9}{-0.9} = \frac{0.9-x}{0.9} \\
\ell_1^1(x) &= \frac{x}{0.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_0^2(x) &= \frac{(x-0.9)(x-0.6)}{-0.9(-0.6)} = 1.852(x-0.9)(x-0.6) \\
\ell_1^2(x) &= \frac{x(x-0.6)}{0.9(0.9-0.6)} = 3.704x(x-0.6) \\
\ell_2^2(x) &= \frac{x(x-0.9)}{0.6(0.6-0.9)} = -5.556x(x-0.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_0^3(x) &= \frac{(x-0.9)(x-0.6)(x-0.4)}{-0.9(-0.6)(-0.4)} = -4.630(x-0.9)(x-0.6)(x-0.4) \\
\ell_1^3(x) &= \frac{x(x-0.6)(x-0.4)}{0.9(0.9-0.6)(0.9-0.4)} = 7.407x(x-0.6)(x-0.4) \\
\ell_2^3(x) &= \frac{x(x-0.9)(x-0.4)}{0.6(0.6-0.9)(0.6-0.4)} = -27.78x(x-0.9)(x-0.4) \\
\ell_3^3(x) &= \frac{x(x-0.9)(x-0.6)}{0.4(0.4-0.9)(0.4-0.6)} = 25.00x(x-0.9)(x-0.6).
\end{aligned}$$

Vi finner da interpolasjonspolynomene som

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= f(x_0)\ell_0^1(x) + f(x_1)\ell_1^1(x) = 0.420x + 1 \\
p_2(x) &= f(x_0)\ell_0^2(x) + f(x_1)\ell_1^2(x) + f(x_2)\ell_2^2(x) = -0.070x^2 + 0.484x + 1.00 \\
p_3(x) &= f(x_0)\ell_0^3(x) + f(x_1)\ell_1^3(x) + f(x_2)\ell_2^3(x) + f(x_3)\ell_3^3(x) \\
&= 0.0210x^3 - 0.102x^2 + 0.495x + 1.00.
\end{aligned}$$

Dette gir til slutt

$$\begin{aligned}
|p_1(0.45) - f(0.45)| &= 0.0150 \\
|p_2(0.45) - f(0.45)| &= 0.000639 \\
|p_3(0.45) - f(0.45)| &= 0.0000450.
\end{aligned}$$

b) Bruk teorem 6.2 s.183–184. Siden interpolasjonspunktene og punktet 0.45 alle ligger mellom 0 og 0.9 har vi

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0,0.9)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|$$

Dessuten er

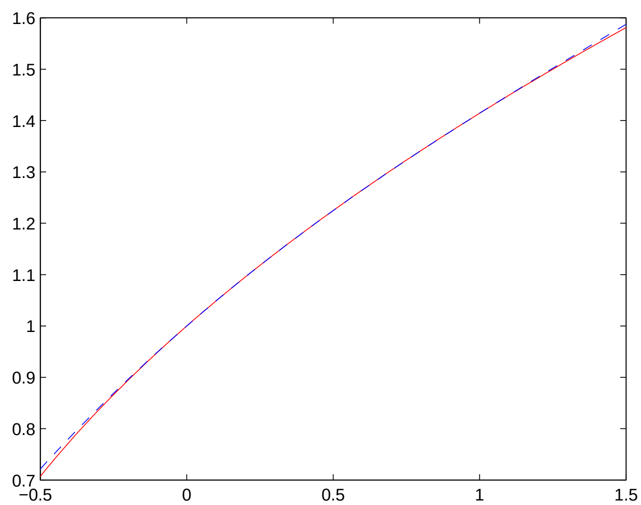
$$f' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \; f'' = -\frac{1}{4(\sqrt{x+1})^3}, \; f''' = \frac{3}{8(\sqrt{1+x})^5}, \; f^{(4)} = -\frac{15}{16(\sqrt{1+x})^7}$$

så $\max_{\xi \in (0,0.9)} |f^{(n+1)}(\xi)| = |f^{(n+1)}(0)|$. Vi ender med skrankene

$$|f(0.45) - p_1(0.45)| \leq \frac{1/4}{2!} \cdot 0.45|0.45 - 0.9| = 2.53 \cdot 10^{-2}$$
$$|f(0.45) - p_2(0.45)| \leq \frac{3/8}{3!} \cdot 0.45|0.45 - 0.9||0.45 - 0.6| = 1.90 \cdot 10^{-3}$$
$$|f(0.45) - p_3(0.45)| \leq \frac{15/16}{4!} \cdot 0.45|0.45 - 0.9||0.45 - 0.6||0.45 - 0.4| = 5.93 \cdot 10^{-5}.$$

Vi ser at alle feilskrankene er ganske konservative i forhold til den eksakte feilen vi har beregnet i evalueringspunktet.

c) I figur 1 ser vi at når vi utvider intervallet fra $[0, 0.9]$ til $[-0.5, 1.5]$ ser vi at jo lenger unna det opprinnelige intervallet vi kommer, jo større blir feilen.



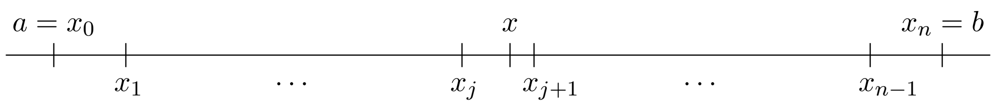
Figur 1: Heltrukken: $f(x)$, stiplet: $p_3(x)$.

Oppgave 2

Ved å evaluere polynomene p og q i punktene gitt i tabellen ser vi at de gir samme resultat som tabellverdiene til $f(x)$.

Dette motsier ikke teorem 6.1, fordi det krever at graden på interpolasjonspolynomene maksimalt kan være lik antall datapunkter minus én. Vi ser at graden til q er for høy til å være dekket av teoremet.

Oppgave 3



Figur 2: Illustrasjon av situasjonen i oppgave 3.

Vi deler opp produktet i tre deler og ser på hver av disse separat, som anbefalt i oppgaven. Først ser vi på tilfellene $k < j$ og $k > j+1$:

$$\begin{aligned} k < j \quad &\Rightarrow \quad |x - x_k| < x_{j+1} - x_k = (j+1-k)h, \\ k > j+1 \quad &\Rightarrow \quad |x - x_k| < x_k - x_j = (k-j)h. \end{aligned}$$

La så $0 \le \alpha \le 1$ være slik at $\alpha h = x - x_j$. Dette gir at $|x - x_j||x - x_{j+1}| = \alpha(1-\alpha)h^2$. Siden $\max_{0 \le \alpha \le 1} \alpha(1-\alpha) = 1/4$, så blir det tredje tilfellet

$$|x - x_j||x - x_{j+1}| \le \frac{1}{4}h^2.$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| &\le \frac{1}{4}h^2 \prod_{k=0}^{j-1}(j+1-k)h \cdot \prod_{k=j+2}^{n}(k-j)h \\ &= \frac{1}{4}h^{n+1}(j+1)!(n-j)!. \end{aligned}$$

Denne har sin største verdi for $j = 0$ eller $j = n-1$, og vi får

$$\prod_{k=0}^{n} |x - x_k| = \Big|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\Big| \le \frac{1}{4}h^{n+1}n!.$$

Sammen med teorem 6.2 i S&M gir dette feilskranke (1) i oppgaveteksten (med $M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$).

Oppgave 4

a) Vi bruker induksjon. Utsagnet er sant for $m = 0$. La oss anta det er sant for en $m \geq 0$. Da har vi

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(m)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2^{\frac{m}{2}} e^x \sin\left(x + m\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \left(e^x \left(\sin\left(x + m\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + m\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

og ønsker å vise at

$$f^{(m+1)}(x) = 2^{\frac{m+1}{2}} \left(e^x \left(\sin\left(x + (m+1)\,\frac{\pi}{4}\right)\right)\right). \tag{2}$$

Vi omformer (2) til (1):

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= 2^{\frac{m+1}{2}} \left(e^x \left(\sin\left(x + m\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + m\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= 2^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{2} e^x \left(\sin\left(x + m\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(m + \frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

b) Feilskranke (1) i oppgaveteksten gir oss

$$M = \max_{x \in [-3,1]} \left| 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right) \right| \leq 2^{\frac{n+1}{2}} e.$$

Dette gir

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} 2^{\frac{n+1}{2}} e \left(\frac{4}{n}\right)^{n+1} = \frac{2^{\frac{5n+1}{2}} e}{(n+1)\, n^{n+1}} = s_n$$

og

n	8	9	10	11
s_n	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$6.54 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$

så $n = 11$ er nok.

Oppgave 5

Ved å bruke Matlab finner vi estimatet $93.705 \cdot 10^6\,\mathrm{Sm}^3$ for 1990. Videre finner vi ved interpolasjonspolynomet at vi kan forvente $71.671 \cdot 10^6\,\mathrm{Sm}^3$ i 2009 og $-1.272 \cdot 10^6\,\mathrm{Sm}^3$ i 2010.