

# TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

## Øving 4

### Oppgave 1

- a) Bruk dividerte differanser og Newtons interpolasjonsformel for å finne polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene i tabellen:

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 2 & 3 \\ y_i & 1 & 2 & 4 \end{array}.$$

- b) Legg til punktet  $(1, 0)$  til tabellen i punkt **a**). Hva blir interpolasjonspolynomet nå?

### Oppgave 2

I denne oppgaven skal du approksimere  $\sin(x)$  på intervallet  $[0, \pi]$  ved hjelp av polynominterpolasjon.

- a) Velg 4 ekvidistante noder på intervallet. Finn polynomet, og en øvre grense for feilen  $|\sin(x) - p_3(x)|$ .
- b) Gjenta punkt **a**), men bruk Chebyshev-noder i stedet (se hint). (Du er ikke nødt til å regne ut polynomet, men sett opp interpolasjonspunktene).
- c) I de to tilfellene (ekvidistante og Chebyshev-noder), finn et uttrykk for en øvre grense for feilen uttrykt ved  $n$  (polynomets grad). Plott feilgrensen som funksjon av  $n$  og sammenlign de to tilfellene.

**Hint:** Chebyshev-nodene er definert på intervallet  $[-1, 1]$ . For å flytte dem over på et vilkårlig intervall  $[a, b]$  brukes variabelskiftet

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1, 1].$$

Feilformelen justeres tilsvarende.

### Oppgave 3

Skriv to funksjoner i MATLAB, en som beregner tabellen over dividerte differanser basert på et gitt datasett, og en som beregner verdier av interpolasjonspolynomet i gitte punkter, basert på denne tabellen. F.eks.

```
function tab = divdiff(x, y)
```

og

```
function y = pval(tab, t)
```

hvor  $\mathbf{t}$  kan være en vektor.

Her kan iterert multiplikasjon være nyttig. La

$$p(x) = f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Definer polynomene  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$  ved

$$\begin{aligned} b_n(x) &= f_n \\ b_{n-1}(x) &= f_{n-1} + (x - x_{n-1})b_n(x) \\ &\vdots \\ b_0(x) &= f_0 + (x - x_0)b_1(x) \end{aligned}$$

Da vil  $b_0(x) = p(x)$ . Dette sees lett ved å sette inn for  $b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)$  i  $b_0$  og gange ut. Test funksjonene på datasettet i oppgave 1.

### Oppgave 4

Gitt Runges funksjon  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Finn og plott polynomet som interpolerer  $f$  i ekvidistante noder. Bruk  $n = 6, 11$  og  $21$ . Bruk MATLAB-funksjonen `polyfit`. Denne funksjonen genererer et polynom av grad  $n$  som interpolerer de oppgitte datapunktene. Polynomet blir interpolasjonspolynomet hvis vi bruker  $n + 1$  datapunkter og polynomgraden er  $n$ . Bruk `polyval` for å evaluere interpolasjonspolynomet på et ønsket utvalg av verdier, og plott resultatet.

Gjenta eksperimentet med Chebyshev-noder. Kommenter resultatet.

### Oppgave 5

La avstanden  $h$  mellom nodene være gitt, slik  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Sett  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

På en slik følge av  $f$ 'er kan vi definere en *foroverdifferanse* rekursivt ved

$$\Delta^0 f_0 = f_0, \quad \Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta^k f_0 = \Delta(\Delta^{k-1} f_0) = \Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Vi får da at

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0, \quad \Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0, \quad \text{osv.}$$

La  $x = x_0 + sh$ , der  $s \in \mathbb{R}$ . Oppgaven går ut på å vise at interpolasjonspolynomet som interpolerer  $f$  i nodene  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  kan skrives som

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f_0 + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \quad (1)$$

hvor

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

a) Vis ved induksjon:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0.$$

b) Vis at

$$\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = k!h^k \binom{s}{k}, \quad k \geq 1.$$

c) Bruk resultatene fra **a)** og **b)** til å vise Newtons foroverdifferanseformel (1)

d) Anvend formelen på datasettet i oppgave **1b)**.

**Kommentar:** Tilsvarende går det an å vise *Newtons bakoverdifferanseformel*. Bakoverdifferanser på følgen  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  er definert ved

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla f_n = f_n - f_{n-1}, \quad \nabla^k f_n = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Newtons bakoverdifferanseformel er gitt ved

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f_n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n.$$

**Forslag til noen relevante eksamensoppgaver:**

Dere som ønsker litt flere oppgaver/eksempler kan ta en titt på følgende eksamensoppgaver:

Desember 2007, oppg. 1.

Desember 2006, oppg. 1.

August 2005, oppg. 2.