

# TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

## Løsningsforslag øving 5

### Oppgave 1

Vi studerer Hermite-interpolasjon som karakteriseres ved at et polynom  $p(x)$  definert på  $n + 1$  distinkte noder  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tilfredsstillende betingelsene

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = v_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

der  $\{y_i\}_{i=0}^n$  og  $\{v_i\}_{i=0}^n$  er vilkårlige, spesifiserte verdier.

- a) Det er rimelig å anta  $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$  siden (1) spesifiserer  $2n + 2$  betingelser (2 betingelser for hvert av  $n + 1$  punkter). Et polynom av grad  $2n + 1$  kan generelt representeres ved

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1}$$

og har følgelig  $2n + 2$  parametre  $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ . Vi kan dermed bruke betingelsene (1) til entydig å bestemme disse parametrene.

- b) Vi antar at de foreløpig uspesifiserte funksjonene  $A_i(x)$  og  $B_i(x)$ , alle definert for  $i = 0, 1, \dots, n$ , tilfredsstillende

$$\begin{aligned} A_i(x_j) &= \delta_{ij}, & B_i(x_j) &= 0, \\ A_i'(x_j) &= 0, & B_i'(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

for alle  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Vi definerer funksjonen  $g(x)$  som oppgitt ved

$$g(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n v_i B_i(x). \quad (3)$$

*Merk:* Vi har foreløpig ikke sagt noe om hvilken type funksjon  $A_i(x)$  og  $B_i(x)$  er, bare at de skal tilfredsstillende betingelsene (2).

Gitt funksjonen  $g(x)$  i (3) finner vi spesielt for vilkårlig  $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} g(x_j) &= \sum_{i=0}^n y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^n v_i B_i(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ij} + \sum_{i=0}^n v_i \cdot 0 = y_j, \\ g'(x_j) &= \sum_{i=0}^n y_i A_i'(x_j) + \sum_{i=0}^n v_i B_i'(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot 0 + \sum_{i=0}^n v_i \delta_{ij} = v_j. \end{aligned}$$

Vi har dermed vist at en funksjon  $g(x)$  som definert i (3) oppfyller (1) såfremt *basisfunksjonene*  $A_i(x)$  og  $B_i(x)$  tilfredsstillende (2).

- c) Vi ser nå på mulige representasjoner av basisfunksjonene  $A_i(x)$  og  $B_i(x)$ . Spesielt ser vi på basisfunksjoner  $A_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$  og  $B_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$ . Vi bruker kardinalfunksjonene

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

som tilfredsstiller  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$  og studerer spesielt funksjonene

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x), \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \quad (4)$$

Det er da åpenbart at  $A_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$  og  $B_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$ . Vi finner videre at

$$\begin{aligned} A'_i(x) &= -2L'_i(x_i)L_i^2(x) + 2(1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i(x)L'_i(x) \\ &= 2L_i(x)L'_i(x)(1 - L_i(x) - 2(x - x_i)L'_i(x_i)) \\ B'_i(x) &= L_i^2(x) + 2(x - x_i)L_i(x)L'_i(x) = L_i(x)(L_i(x) + 2(x - x_i)L'_i(x)). \end{aligned}$$

Da ser vi videre lett at polynomene  $A_i(x)$  og  $B_i(x)$  tilfredsstiller (2) for alle  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Polynomene (4) er altså polynomer av grad  $2n + 1$  som tilfredsstiller de nødvendige basisbetingelsene og følgelig kan brukes som basisfunksjoner for å konstruere *polynomer* av grad  $2n + 1$  som tilfredsstiller betingelsene (1).

d) Vi skal finne et tredjegradspolynom  $p(x)$  som tilfredsstiller

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 3, \quad p(2) = 14, \quad p'(2) = 24.$$

I dette tilfellet er  $2n + 1 = 3 \Rightarrow n = 1$  og vi finner spesielt

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x-2}{1-2} = 2-x, & L_1(x) &= \frac{x-1}{2-1} = x-1 \\ L'_0(x) &= -1, & L'_1(x) &= 1 \\ L_0^2(x) &= x^2 - 4x + 4, & L_1^2(x) &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

Fra representasjonen (4) finner vi da

$$\begin{aligned} A_0(x) &= (1 - 2(x - 1) \cdot (-1))(x^2 - 4x + 4) = (2x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\ A_1(x) &= (1 - 2(x - 2) \cdot 1)(x^2 - 2x + 1) = (5 - 2x)(x^2 - 2x + 1) \\ B_0(x) &= (x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\ B_1(x) &= (x - 2)(x^2 - 2x + 1). \end{aligned}$$

Da er tredjegradspolynomet som tilfredsstiller betingelsene over gitt ved

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x - 1)(x^2 - 4x + 4) + 3 \cdot (x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\ &\quad + 14 \cdot (5 - 2x)(x^2 - 2x + 1) + 24 \cdot (x - 2)(x^2 - 2x + 1) \\ &= x^3 + 6x^2 - 12x + 6. \end{aligned}$$

Det siste resultatet følger ved litt regning.

## Oppgave 2

La  $s(x)$  være en splinefunksjon på den oppgitte formen. Da er  $s(x)$  en kontinuerlig funksjon som på intervallet  $I_j := [x_j, x_{j+1}]$  sammenfaller med en lineær funksjon  $s_j(x) = \gamma_j(x - x_j) + \delta_j$ .

Vi prøver å velge  $\beta, \alpha_0, \alpha_1, \dots$  slik at formelen holder på hvert intervall  $I_j$ .

Vi ser at  $(x - x_j)^+$  er null for  $x \leq x_j$  og sammenfaller med linja med stigningstall 1 gjennom  $x_j$  for  $x > x_j$ . På intervallet  $I_j$  er

$$(x - x_i)^+ = \begin{cases} x - x_i, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases},$$

så uttrykket til høyre for likhetstegnet er lik  $\beta + \sum_{i=0}^j \alpha_i(x - x_i)$  på  $I_j$ .

På intervallet  $I_0$  ser vi at  $(x - x_i)^+ = 0$  for alle  $i > 0$ , og for at likheten skal holde må vi ha

$$s_0(x) = \gamma_0(x - x_0) + \delta_0 = \beta + \alpha_0(x - x_0),$$

altså må  $\beta = \delta_0$ ,  $\alpha_0 = \gamma_0$ .

Vi fortsetter med induksjon og antar at formelen holder på  $I_j$ , altså

$$s_j(x) = \gamma_j(x - x_j) + \delta_j = \beta + \sum_{i=0}^j \alpha_i(x - x_j).$$

For at formelen skal holde på  $I_{j+1}$  må vi ha

$$s_{j+1}(x) = \gamma_{j+1}(x - x_{j+1}) + \delta_{j+1} = s_j(x) + \alpha_{j+1}(x - x_{j+1})$$

Vi vet at  $s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1})$  siden  $s(x)$  er kontinuerlig, så de lineære funksjonene  $\gamma_{j+1}(x - x_{j+1}) + \delta_{j+1}$  og  $s_j(x) + \alpha_{j+1}(x - x_{j+1}) = \delta_j + \gamma_j(x - x_j) + \alpha_{j+1}(x - x_{j+1})$  er like om de har samme stigningstall. Setter vi  $\alpha_{j+1} = \gamma_{j+1} - \gamma_j$  får vi nettopp dette.

### Oppgave 3

Betrakt  $i$  slik at  $|s_i''| = \max_l |s_l''|$ , og betrakt ligning  $i$  i det lineære systemet som brukes til å beregne de naturlige kubiske spliner:

$$hs_{i-1}'' + 4hs_i'' + hs_{i+1}'' = 6 \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \right).$$

Ved å bruke at  $|s_i''| = \max_l |s_l''|$  og Taylors teorem, så har vi

$$4h|s_i''| \leq h|s_{i-1}''| + h|s_{i+1}''| + 6|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})| \leq 2h|s_i''| + 6|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|$$

og dermed

$$h|s_i''| \leq 3|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|,$$

med  $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $\eta_{i-1} \in (x_{i-1}, x_i)$ . I tillegg har vi

$$|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})| = \frac{|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|}{|\eta_i - \eta_{i-1}|} |\eta_i - \eta_{i-1}| \leq |2hf''(\xi)| \leq 2h\|f''\|_\infty,$$

slik at vi får

$$|s_i''| \leq 6\|f''\|_\infty.$$

### Anvendelse av resultatet i oppgave 3

Under antagelsene i oppgave 3 ønsker vi nå å bevise feilskranken

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{7}{8}h^2\|f''\|_\infty. \quad (5)$$

Betrakt intervallet  $[x_{i-1}, x_i]$ , og la  $\bar{x} \in (x_{i-1}, x_i)$ . Betrakt funksjonen

$$g(x) := f(x) - s(x) - \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})}(f(\bar{x}) - s(\bar{x})).$$

Vi har  $g(x_i) = 0$ ,  $g(x_{i-1}) = 0$  og  $g(\bar{x}) = 0$ , så  $g''(x)$  har minst ett nullpunkt  $\bar{\xi}_i \in (x_{i-1}, x_i)$  slik at vi får

$$0 = f''(\bar{\xi}_i) - s''(\bar{\xi}_i) - \frac{2}{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})}(f(\bar{x}) - s(\bar{x})),$$

og

$$f(\bar{x}) - s(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})}{2}(f''(\bar{\xi}_i) - s''(\bar{\xi}_i)).$$

Siden  $s''(x)$  er et lineært polynom på  $[x_{i-1}, x_i]$ , (en linje mellom  $(x_{i-1}, s''_{i-1})$  og  $(x_i, s''_i)$ ) så er

$$|s''(\bar{\xi}_i)| \leq \max\{|s''_{i-1}|, |s''_i|\}, \quad \forall i.$$

Man kan også lett vise (se øving 3, oppgave 3) at

$$|(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})| \leq \frac{h^2}{4},$$

hvilket leder til

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8}h^2(\|f''\|_\infty + \max_i |s''_i|).$$

Sammen med resultatet fra oppgave 3 gir dette (5).