

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

Løsningsforslag øving 7

Oppgave 1

a) Vi har

$$\begin{aligned} \text{Eksakt løsning:} \quad & y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n); h) + d_{n+1}, \\ \text{Numerisk løsning:} \quad & y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h). \end{aligned}$$

Ta differensen mellom disse, og bruk at den globale feilen i skritt n er gitt ved $e_n = y(t_n) - y_n$:

$$e_{n+1} = e_n + h\left(\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)\right) + d_{n+1}.$$

Ta normen på begge sider og bruk så trekantulikheten for normer:

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}\| &= \left\| e_n + h\left(\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)\right) + d_{n+1} \right\| \\ &\leq \|e_n\| + h\left\| \Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h) \right\| + \|d_{n+1}\|. \end{aligned}$$

Bruk deretter antagelsene som er gitt i oppgaven:

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + hM\|y(t_n) - y_n\| + Dh^{p+1} = (1 + hM)\|e_n\| + Dh^{p+1}.$$

Forutsatt at $y(t_0) = y_0$ har vi nå at

$$\begin{aligned} \|e_1\| &\leq Dh^{p+1}, \\ \|e_2\| &\leq (1 + hM)Dh^{p+1} + Dh^{p+1}, \\ &\vdots \\ \|e_n\| &\leq Dh^{p+1} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + hM)^i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

slik at

$$\|e_N\| \leq Dh^{p+1} \sum_{i=0}^{N-1} (1 + hM)^i = \frac{(1 + hM)^N - 1}{1 + hM - 1} Dh^{p+1} = \frac{(1 + hM)^N - 1}{M} Dh^p.$$

Bruk det faktum at $e^x \geq 1 + x$ for $x > 0$, slik at

$$\|e_N\| \leq \frac{e^{MhN} - 1}{M} Dh^p = \frac{e^{M(t_{\text{end}} - t_0)} - 1}{M} Dh^p = Ch^p.$$

Dette argumentet er gyldig uavhengig av hvilken norm som blir valgt.

b) Vi vet at f oppfyller Lipschitz-betingelsen i y , dvs.

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

Inkrementfunksjonen $\Phi(t_n, y_n; h)$ for den oppgitte metoden er gitt som

$$\Phi(t_n, y_n; h) = b_1 k_1 + b_2 k_2.$$

Så la oss regne ut denne for to ulike startverdier y_n og \tilde{y}_n .

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), & \tilde{k}_1 &= f(t_n, \tilde{y}_n), \\ k_2 &= f(t_n + c_2 h, y_n + h c_2 k_1), & \tilde{k}_2 &= f(t_n + c_2 h, \tilde{y}_n + h c_2 \tilde{k}_1). \end{aligned}$$

Dermed er

$$\Phi(t_n, y_n; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}_n; h) = b_1(k_1 - \tilde{k}_1) + b_2(k_2 - \tilde{k}_2).$$

Ta normen på begge sider, bruk egenskapene til en norm og Lipschitz-kontinuitet for f :

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_n, y_n; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}_n; h)\| &= \|b_1(k_1 - \tilde{k}_1) + b_2(k_2 - \tilde{k}_2)\| \\ &\leq |b_1| \|k_1 - \tilde{k}_1\| + |b_2| \|k_2 - \tilde{k}_2\| \\ &\leq |b_1| L \|y_n - \tilde{y}_n\| + |b_2| L \|y_n + h c_2 k_1 - \tilde{y}_n - h c_2 \tilde{k}_1\| \\ &\leq |b_1| L \|y_n - \tilde{y}_n\| + |b_2| L (\|y_n - \tilde{y}_n\| + h |c_2| L \|y_n - \tilde{y}_n\|) \end{aligned}$$

Samler vi sammen dette og bruker $h \leq h_{\max}$, har vi vist følgende:

$$\|\Phi(t_n, y_n; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}_n; h)\| \leq M \|y_n - \tilde{y}_n\|$$

med

$$M = L(|b_1| + |b_2|) + h_{\max} L^2 |b_2 c_2|.$$

Oppgave 2

- a) Vi kan skrive (4) fra oppgaveteksten som et system av to førsteordens differensialligninger ved å innføre variabelen $v = u'$. Da får vi

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ A \cos \omega t + u(1 - u^2) - kv \end{pmatrix}.$$

- b) Ved å skrive

$$\mathbf{u} = (u, v)^T$$

og

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = (v, A \cos \omega t + u(1 - u^2) - kv)^T$$

der superskript T betyr transponert, kan vi skrive forbedret Euler for dette problemet som

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \frac{h}{2} \left(\mathbf{f}(t_m, \mathbf{u}_m) + \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{u}_m + h\mathbf{f}(t_m, \mathbf{u}_m)) \right).$$

Med de gitte startverdiene har vi at

$$\mathbf{f}(t_0, \mathbf{u}_0) = \left(v(0), A \cos(\omega \cdot 0) + u(0)(1 - u(0)^2) - kv(0) \right)^T = (0, A)^T,$$

og

$$\mathbf{f}(t_1, \mathbf{u}_0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{u}_0)) = \mathbf{f}(h, (0 + h \cdot 0, 0 + hA)^T) = A(h, \cos \omega h - kh)^T.$$

Dermed får vi

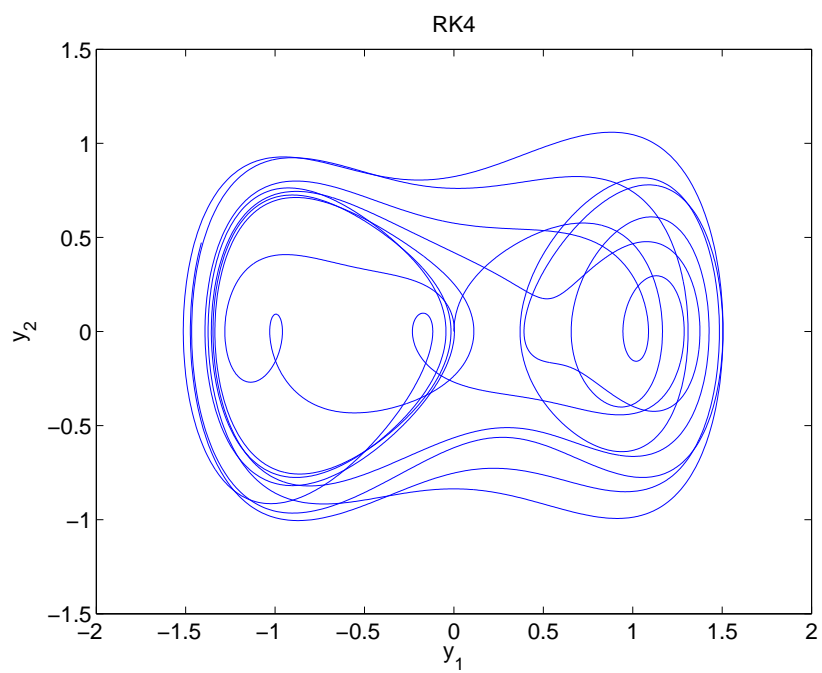
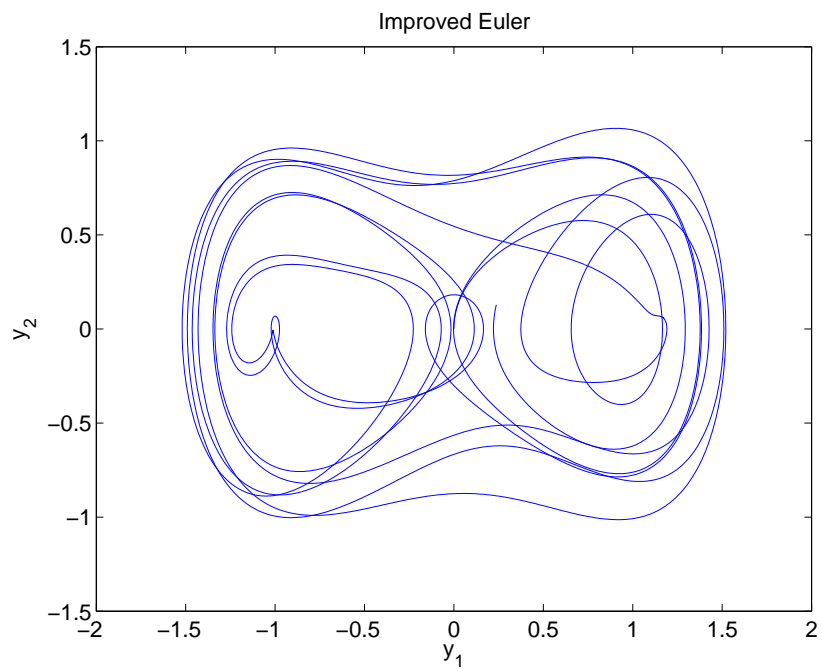
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \cos \omega h - kh \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{Ah}{2} \begin{pmatrix} h \\ 1 + \cos \omega h - kh \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

som med de gitte verdiene gir

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,002 \\ 0,0394 \end{pmatrix}.$$

For punktene **c)**, **d)** og **e)**, se vedlagte MATLAB-filer, og prøv selv.

Resultatet med forbedret Euler og RK4 er gitt i figurene under. Her har vi brukt parametrene fra oppgave **2b)** med $h = 0,01$ og integrert fra 0 til 100.



Oppgave 3

a) De åtte ordensbetingelsene for fjerdeordens Runge–Kutta-metoder er:

$$\sum_i b_i = 1 \quad (1)$$

$$\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\sum_i b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sum_{i,j} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \quad (6)$$

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \quad (7)$$

$$\sum_{i,j,k} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \quad (8)$$

For å kontrollere at den gitte metoden oppfyller ordensbetingelsene behøver vi nå bare å sette inn verdiene fra Butcher-tabellen. For eksempel får vi for (7)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 &= b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

b) Vi ønsker å finne et sett med vektorer \hat{b}_i slik at betingelsene (1)–(4) er tilfredsstilte. Det betyr at

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 &= 1, \\ \frac{1}{2} \hat{b}_2 + \frac{1}{2} \hat{b}_3 + \hat{b}_4 &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} \hat{b}_2 + \frac{1}{4} \hat{b}_3 + \hat{b}_4 &= \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4} \hat{b}_3 + \frac{1}{2} \hat{b}_4 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Dette systemet har en entydig løsning, nemlig vektene i den opprinnelige Kuttas metode, $\hat{b}_1 = \hat{b}_4 = \frac{1}{6}$ og $\hat{b}_2 = \hat{b}_3 = \frac{1}{3}$. Derfor kan ikke denne løsningen brukes til sammenligning.

Oppgave 4

a) Ligningen $y' = y$, $y(0)$ har løsningen $y(t) = e^t y_0$. Løsningen etter et skritt vil være

$$y(h) = e^h y_0 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots \right) y_0 = y_0 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{h^q}{q!}.$$

En eksplisitt metode med s nivåer blir for dette problemet

$$\begin{aligned} k_1 &= y_0 \\ k_2 &= y_0 + ha_{21}k_1 = (1 + ha_{21})y_0 \\ k_3 &= y_0 + ha_{31}k_1 + ha_{32}k_2 = (1 + h(a_{31} + a_{32}) + h^2 a_{32}a_{21})y_0 \\ &\vdots \\ k_s &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}k_j \\ y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \end{aligned}$$

Vi ser at k_i er et polynom av grad $i - 1$ i h . Det betyr at y_1 er et polynom av grad s . Metoden kan altså maksimalt være av orden s .

Kommentar: Det fins eksplisitte Runge–Kutta-metoder av orden s for $s \leq 4$. Men for å finne en slik metode av orden 5, trengs $s \geq 6$.

b) Vi setter opp de 4 gjeldende ordensbetingelsene for metoder av orden 3 med 3 nivåer:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1, \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 &= \frac{1}{2}, \\ b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 &= \frac{1}{3}, \\ b_3 a_{32} c_2 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Dette systemet er lineært for b_1, b_2, b_3 . Vi kan se bort fra den første ligningen og b_1 , og sette opp et system for b_2, b_3 :

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ c_2^2 & c_3^2 \\ 0 & a_{32}c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

For at systemet skal ha en løsning må høyresiden være med i kolonnerommet til matrisen, dette innebærer at 3×3 -matrisen vi får ved å legge til høyresiden som en tredje kolonne må være singulær, dvs. med 0-determinant. Kravet blir derfor

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & 1/2 \\ c_2^2 & c_3^2 & 1/3 \\ 0 & a_{32}c_2 & 1/6 \end{vmatrix} = 0 \quad \implies \quad c_2(3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2) = 0.$$

Nå er ikke $c_2 = 0$ mulig fordi den første kolonnen da blir eksakt null og den andre blir ikke proporsjonal med den tredje. Vi kan også se dette fra at den siste ordensbetingelsen blir umulig å oppfylle. Vi konkluderer derfor med at et nødvendig og tilstrekkelig krav er

$$3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2 = 0.$$

c) Vi kan sette inn $a_{32} = c_3$ i relasjonen ovenfor og får da kravet

$$c_3(c_3 - 3c_2(1 - c_2)) = 0.$$

Vi kan ikke ha $c_3 = 0$ fordi da blir $a_{32} = 0$ og den siste ordensbetingelsen kan ikke oppfylles. Isteden må vi kreve

$$c_3 = 3c_2(1 - c_2).$$

Vi merker oss at alle verdier for c_2 bortsett fra $c_2 = 0, c_2 = 1$ er tillatt. For alle øvrige verdier av c_2 karakteriseres metoden forøvrig som følger uttrykt ved den frie parameteren c_2 :

$$b_1 = \frac{c_2^3 - 3c_2^2/2 + 2c_2/3 - 1/9}{c_2^2(c_2 - 1)},$$

$$b_2 = \frac{c_2/2 - 1/6}{c_2^2},$$

$$b_3 = \frac{1}{18c_2^2(1 - c_2)}.$$

d) En finner feilestimeringsmetode ved å kreve

$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 = 1, \quad \hat{b}_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Merk kravet fra tidligere om at $c_2 \notin \{0, 1\}$. Dermed kan vi sette

$$\hat{b}_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}, \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{2c_2},$$

så dette blir også en familie med parameteren c_2 fra forrige punkt.

Oppgave 5

a) Egenverdiene er $\lambda_{1,2} = -10 \pm 20i$.

b) Stabilitetsfunksjonen er gitt ved

$$R(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

For at den numeriske løsningen skal være stabil må

$$|R(h\lambda)| \leq 1$$

for alle egenverdiene av M . I vårt tilfelle betyr det at

$$\begin{aligned} |R((-10 + 20i)h)|^2 &= R((-10 + 20i)h) \cdot R((-10 - 20i)h) \\ &= 1 - 20h + 200h^2 - 5000h^3 + 62500h^4 \leq 1, \end{aligned}$$

noe som er oppfylt for $0 \leq h \leq 0,08603$.

c) Se ov07_5c.m. Bruk f.eks. skrittlengdene 0,085, 0,086 og 0,087.

Oppgave 6

Du kan gjøre denne oppgaven selv. Resultatet vil kanskje overraske deg!