

# TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2011

## Øving 7

### Oppgave 1

Gitt en ordinær differensialligning

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}. \quad (1)$$

Du kan anta at  $f$  tilfredsstillers Lipschitz-betingelsen

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

En *én-skrittmetode* for å løse denne differensialligningen kan beskrives ved

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N} \quad (2)$$

Anta følgende:

- Den lokale avbruddsfeilen gitt ved

$$d_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n); h)$$

tilfredsstillers

$$\|d_{n+1}\| \leq Dh^{p+1}$$

der  $D$  er en positiv konstant.

- Funksjonen  $\Phi$  er Lipschitz-kontinuerlig, med Lipschitz-konstant  $M$ , dvs.

$$\|\Phi(t_n, y; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}; h)\| \leq M\|y - \tilde{y}\|. \quad (3)$$

- a) Vis at i så fall tilfredsstillers den globale feilen i  $t_{\text{end}}$

$$\|e_N\| = \|y(t_{\text{end}}) - y_N\| \leq Ch^p,$$

der  $C$  er en positiv konstant som avhenger av  $M$ ,  $D$  og intervallet  $t_{\text{end}} - t_0$ .

- b) Anta at en eksplisitt Runge–Kutta-metode i 2 nivåer, gitt ved Butcher-tablået

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & c_2 & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

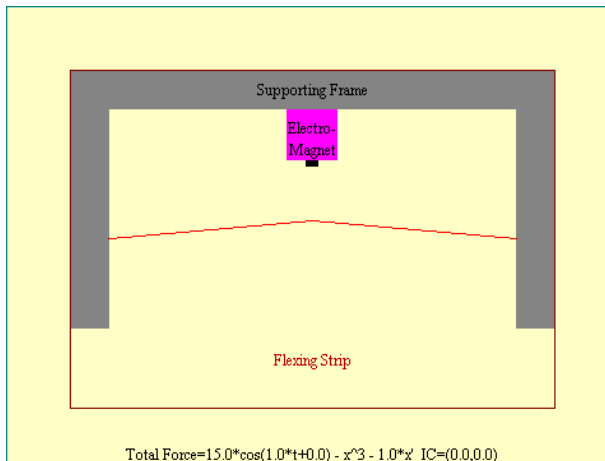
blir brukt til å løse (1). Vis at metoden kan skrives på formen (2). Anta nå at  $h \leq h_{\text{max}}$  og vis at  $\Phi$  oppfyller Lipschitz-betingelsen i  $y$ , med en Lipschitz-konstant  $M$  som avhenger av metodekoeffisientene  $c_2$ ,  $b_1$  og  $b_2$ , og av  $L$  og  $h_{\text{max}}$ .

## Oppgave 2

En mye studert matematisk modell er Duffing-oscillatoren. Denne kan beskrives ved startverdiproblemet

$$u'' + ku' - u(1 - u^2) = A \cos(\omega t). \quad (4)$$

G. Duffing brukte i 1918 denne ligningen til å beskrive en tynn, bøyelig metallstav som svinger i nærheten av en elektromagnet. Konstanten  $k$  er dempingen, mens  $\omega$  og  $A$  beskriver henholdsvis frekvens og amplitude til pådraget fra elektromagneten. Se <http://www.mcasco.com/pat1.html> for flere detaljer.



- Begynn med å skrive om (4) til et system av to førsteordens differensialligninger.
- Gjør en håndregning (dvs. kalkulator er lov) av ett skritt med forbedret Eulers metode (også kalt Heuns metode) der du setter  $k = 0,25$ ,  $A = 0,4$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ , og bruk skrittlengde  $h = 0,1$ .
- Implementer forbedret Eulers metode i MATLAB og bruk den til å løse (4).
- Lag plott av første komponent  $u$  langs  $x$ -aksen og andre komponent  $u'$  langs  $y$ -aksen (dette kalles et *faseplott*). Begynn med de samme parametrene som i **b**), men varier etterhvert og se hva som skjer. I dette punktet kan du bruke  $h = 0,01$ . Forsøk å integrere over ganske lang tid.
- Forsøk å kjøre gjennom med mange forskjellige startverdier, og plott de resulterende integralkurver for å få et bilde av hvordan integralkurvene ser ut. Du kan bruke samme verdier som ovenfor for  $k = 0,25$ ,  $A = 0,4$ ,  $\omega = 1,0$ .
- Lag til slutt en implementasjon der du bytter ut forbedret Euler med RK4. Sammenlign resultatene.

### Oppgave 3

Kuttas metode fra 1901 er den mest berømte av alle eksplisitte Runge–Kutta-par, gitt ved følgende Butcher-tabell:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- a) Verifiser at metoden har orden 4 ved å sjekke alle de 8 ordensbetingelsene.
- b) En besnærende tanke er nå å finne et nytt sett med vektorer, si  $\hat{b}_s$  slik at den tilhørende metoden får orden 3, til bruk for feilestimering og skritt lengdekontroll. Forsøk å finne et slikt sett med  $\hat{b}_s$ .

### Oppgave 4

- a) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med  $s$  nivåer maksimalt kan være av orden  $s$ . (Hint: Bruk  $y' = y$ ,  $y(0) = y_0$  som testligning.)
- b) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med 3 nivåer av orden 3 må oppfylle
$$3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2 = 0.$$
- c) Karakteriser alle eksplisitte Runge–Kutta-metoder med 3 nivåer av orden 3 som oppfyller  $a_{31} = 0$ , dvs.  $a_{32} = c_3$ . Hvor mange frie parametre fins?
- d) Bestem alle eksplisitte metoder av orden 2 som har samme koeffisienter  $a_{ij}$  som metoden ovenfor, og vektorer som samtidig oppfyller  $\hat{b}_3 = 0$ .

## Oppgave 5

a) Finn egenverdiene til matrisa

$$M = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 40 & -10 \end{pmatrix}.$$

b) Anta at du skal løse differensialligningen

$$y' = My, \quad y(0) = y_0$$

ved hjelp av forbedret Eulers metode. Hva er den største skrittlengden  $h_{\max}$  du kan bruke?

c) Løs ligningen

$$y' = My + g(t), \quad 0 \leq t \leq 10$$

med

$$g(t) = (\sin(t), \cos(t))^T, \quad y(0) = \left( \frac{5210}{249401}, \frac{20259}{249401} \right)^T$$

ved bruk av `impEuler.m`. Velg skrittlengder litt mindre enn og litt større enn  $h_{\max}$ . Hva observerer du?

## Oppgave 6

Den lineære testligningen

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0$$

har løsningen  $y(h) = e^z y_0$  der  $z = \lambda h$ . Et skritt med en Runge–Kutta-metode gir  $y_1 = R(z)y_0$ . Dermed kan vi betrakte stabilitetsfunksjonen  $R(z)$  som en tilnærming til  $e^z$ . Vil  $R(z)$  vokse (i absoluttverdi) raskere enn  $e^z$ ? Dette kan vi finne ut ved å studere når  $|R(z)/e^z| > 1$ .

Skriv om skriptet `stab.m` til å plote området

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)/e^z| > 1\}.$$

Beregn stabilitetsfunksjonen for noen av Runge–Kutta-metodene du kjenner og finn  $\mathcal{A}$  for disse. Du kan også tegne området for stabilitetsfunksjonene for Gauss–Legendre-metodene (kollokasjonsmetoder av orden  $2s$ ). Disse er gitt ved:

$$\begin{aligned} s = 1, \quad R(z) &= \frac{1 + z/2}{1 - z/2}, \\ s = 2, \quad R(z) &= \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12}, \\ s = 3, \quad R(z) &= \frac{1 + z/2 + z^2/10 + z^3/120}{1 - z/2 + z^2/10 - z^3/120}. \end{aligned}$$

Området  $\mathcal{A}$  kalles en *ordensstjerne*.