

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

a) Vi vil vise at feilen oppfyller

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^q} = C.$$

i) Nullpunktet $x^* = \arccos 0,5 \approx 1,0471975512$, og

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
0	0,5000000000	$5,47 \cdot 10^{-1}$	$4,39 \cdot 10^{-1}$	0,803
1	1,2875729002	$2,40 \cdot 10^{-1}$	$4,44 \cdot 10^{-2}$	0,185
2	1,0578736992	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,283
3	1,0472298506	$3,23 \cdot 10^{-5}$	$9,32 \cdot 10^{-6}$	0,287
4	1,0471975514	$3,01 \cdot 10^{-10}$	$8,69 \cdot 10^{-11}$	0,287
5	1,0471975512	$2,62 \cdot 10^{-20}$	$7,56 \cdot 10^{-21}$	0,287
6	1,0471975512	$1,98 \cdot 10^{-40}$		

Vi har som forventet kvadratisk konvergens, dvs. $q = 2$, med $C = 0,287$ (i dette tilfellet er beregningene gjort i Maple, med over 50 siffrers nøyaktighet).

ii) Nullpunktet $x^* = 0$, og

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
1	0,5000000000	$5,00 \cdot 10^{-1}$	0,54	3,69
2	0,2707470413	$2,71 \cdot 10^{-1}$	0,52	7,07
3	0,1414747338	$1,41 \cdot 10^{-1}$	0,51	13,81
4	0,0724047358	$7,24 \cdot 10^{-2}$	0,51	27,29
5	0,0366392002	$3,66 \cdot 10^{-2}$	0,50	54,26
6	0,0184314669	$1,84 \cdot 10^{-2}$	0,50	108,18
7	0,0092440432	$9,24 \cdot 10^{-3}$	0,50	216,02
8	0,0046291426	$4,63 \cdot 10^{-3}$	0,50	431,71
9	0,0023163571	$2,32 \cdot 10^{-3}$	0,50	863,09
10	0,0011586257	$1,16 \cdot 10^{-3}$		

I dette tilfellet er konvergenen lineær, med konstant $C = 0,5$. Dette skyldes at $f'(0) = 0$, så betingelsen for kvadratisk konvergens ikke er oppfylt. I stedet får vi med $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ at

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2},$$

se ligning (5) s. 105 i K&C. Dette er i overensstemmelse med de målte resultatene.

iii) Nullpunktet $x^* = 0$, og

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
1	0,5000000000	$5,00 \cdot 10^{-1}$	0,66	3,02
2	0,3309759368	$3,31 \cdot 10^{-1}$	0,66	4,55
3	0,2199738473	$2,20 \cdot 10^{-1}$	0,67	6,83
4	0,1464514253	$1,46 \cdot 10^{-1}$	0,67	10,25
5	0,0975760249	$9,76 \cdot 10^{-2}$	0,67	15,38
6	0,0650334672	$6,50 \cdot 10^{-2}$	0,67	23,07
7	0,0433505497	$4,34 \cdot 10^{-2}$	0,67	34,60
8	0,0288988576	$2,89 \cdot 10^{-2}$	0,67	51,91
9	0,0192654581	$1,93 \cdot 10^{-2}$	0,67	77,86
10	0,0128435063	$1,28 \cdot 10^{-2}$		

Igjen er konvergensen lineær, denne gangen med $C = 0,67$. Grunnen er den samme som i punkt *ii*).

- b) *i*) $x^* = \arccos(0,5) = \pi/3$, $f'(x^*) = -\sqrt{3}/2$, så dette nullpunktet har multiplisitet 1.
ii) $x^* = 0$, og $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$. Nullpunktet har multiplisitet 2.
iii) $x^* = 0$, og $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3$. Nullpunktet har multiplisitet 3.

c) Fra definisjonen av multiplisitet i oppgaven kan vi skrive

$$\mu(x) = \frac{(x - x^*)^m q(x)}{m(x - x^*)^{m-1} q(x) + (x - x^*)^m q'(x)} = (x - x^*) \frac{q(x)}{m q(x) + (x - x^*) q'(x)}.$$

Så x^* er et enkelt nullpunkt av $\mu(x)$ siden $q(x^*) \neq 0$. Newtons metode anvendt på $\mu(x)$ finnes ved

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)},$$

og denne konvergerer kvadratisk.

- d) Denne oppgaven kan du gjøre selv. Vær oppmerksom på at avrundingsfeil kan bli et problem her, siden $f(x)$ og $f'(x)$ begge går mot 0 når x_k går mot x^* .
e) Denne oppgaven er lik nok Newtons metode til at du får den til på egenhånd.

Oppgave 2

a) Vi skriver om ligningssystemet til

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

der $X = (x_1, x_2)^T$. Jacobi-matrissa blir

$$J(X) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Newtons metode kan da skrives som

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + H^{(n)},$$

der $H^{(n)}$ er gitt implisitt ved

$$J(X^{(n)})H^{(n)} = -F(X^{(n)}). \quad (1)$$

Vi må unngå å velge startverdi der Jacobi-matrisa er singular, altså når $\det(J(X)) = 0$:

$$\det(J(X)) = -2x_1 - 6x_1^2x_2 = -2x_1(1 + 3x_1x_2) = 0.$$

Vi må holde oss vekk fra kurvene $x_1 = 0$ og $3x_1x_2 = -1$, og velger f.eks. startverdier $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0,5$. Her er

$$F(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,375 \end{bmatrix}$$
$$J(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,75 & -1 \end{bmatrix}$$

og vi må løse ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,75 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,375 \end{bmatrix}$$

for å finne $H^{(0)}$. Løsningssystemet har løsning

$$H^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

så etter én iterasjon er $x_1^{(1)} = 1$ og $x_2^{(1)} = 0,5$. I iterasjon to gjøres tilsvarende. Etter to iterasjoner er $x_1^{(2)} = 0,85$ og $x_2^{(2)} = 0,55$.

I vårt tilfelle kan vi også beregne J^{-1} ved formelen for invers av 2×2 -matrise, og dermed skrive ut iterasjonen eksplisitt.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2x_1(1 + 3x_1x_2)} \begin{bmatrix} x_1^2 + 4x_1^3x_2 + x_2^2 + 1 \\ x_1^2(3x_2^2 - x_1^2 + 3) \end{bmatrix}.$$

Normalt vil det være veldig tungvint å beregne J^{-1} slik som vi har gjort. I stedet pleier man å løse (1) numerisk, f.eks. med konjugerte gradienter-metoden. MATLAB gjør dette for oss hvis vi bruker `\`-operatoren for å løse (1).

- b) Se MATLAB-programmene på hjemmesiden.
- c) Som vi så i punkt a) vil Jacobi-matrisa bli singular på x_1 -aksen. Dette gjør at Newton-iterasjonen ikke gir en unik løsning, og algoritmen feiler.

Oppgave 3

a) Vi begynner med $N = 2$, og skriver

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Nå er

$$\begin{aligned} \det(A + \varepsilon F) &= (a_{11} + \varepsilon f_{11})(a_{22} + \varepsilon f_{22}) - (a_{12} + \varepsilon f_{12})(a_{21} + \varepsilon f_{21}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \varepsilon(a_{11}f_{22} + a_{22}f_{11} - a_{12}f_{21} - a_{21}f_{12}) \\ &\quad + \varepsilon^2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}). \end{aligned}$$

Vi ser altså at $\det(A + \varepsilon F)$ er et andregradspolynom i ε . Vi kan ved induksjon bevise at tilsvarende gjelder for alle $N \geq 2$.

Anta at hvis \tilde{A} og \tilde{F} er $(N - 1) \times (N - 1)$ -matriser, så er $\det(\tilde{A} + \varepsilon\tilde{F})$ et polynom av grad $N - 1$ i ε . Betrakt nå $N \times N$ -matrisene A og F . Vi skriver ut determinanten til $B = A + \varepsilon F$ ved Laplace' formel.¹

$$\begin{aligned} \det B &= b_{11}\text{Cof}(b_{11}) - b_{12}\text{Cof}(b_{12}) + \cdots + (-1)^{1+N}b_{1N}\text{Cof}(b_{1N}) \\ &= (a_{11} + \varepsilon f_{11})\text{Cof}(b_{11}) - \cdots + (-1)^{1+N}(a_{1N} + \varepsilon f_{1N})\text{Cof}(b_{1N}) \end{aligned}$$

Kofaktorene $\text{Cof}(b_{ij})$ er determinantene til matrisene som oppstår ved å slette rad i og kolonne j fra B . Disse matrisene er $(N - 1) \times (N - 1)$ -matriser på formen $\tilde{A} + \varepsilon\tilde{F}$, så determinantene er etter induksjonshypotesen polynomer av grad $N - 1$. Dermed er hvert ledd i summen et polynom av grad N , og $\det B = \det(A + \varepsilon F)$ er også det.

Vi noterer også at om vi setter $\varepsilon = 0$ får vi $\det A$. Polynomer er kontinuertlige, så det følger at hvis $\det A \neq 0$, så finnes det også en $\delta > 0$ slik at $\det A + \varepsilon F \neq 0$ for alle $0 < \varepsilon < \delta$.

b) Fra Cramers regel har vi at

$$x_i(\varepsilon) = \frac{D_i(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

hvor $D(\varepsilon) = \det(A + \varepsilon F)$ og $D_i(\varepsilon)$ er determinanten til matrisen som oppstår når kolonne i i $A + \varepsilon F$ erstattes av $b + \varepsilon v$. Vi ser at begge disse determinantene er på formen som ble betraktet i punkt a), og er derfor polynomer i ε av grad N . I a) har vi også vist at $D(\varepsilon)$ er ulik 0 for små ε , så $x_i(\varepsilon)$ er kontinuertlige og deriverbare for små ε .

¹Også kalt kofaktorekspansjon.