TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Øving 1

Det forventes at du har lest 1.4, 1.5 og 4.3 i S&M.

Oppgave 1

a) Anvend Newtons metode på ligningen $f(x) = 0$ der

i) $f(x) = \cos x - 1/2$, med $x_0 = 0{,}5$.
ii) $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$, med $x_0 = 0{,}5$.
iii) $f(x) = x(1 - \cos x)$, med $x_0 = 0{,}5$.

Bruk Matlab. I alle tre tilfellene vil iterasjonene konvergere mot et nullpunkt $x^\star$. Mål konvergensordenen med f.eks. Matlab i de tre tilfellene. Er resultatet i overenstemmelse med teorien? Hvis nei, kan du forklare hvorfor? **Merk:** For noen av ligningene kan begrenset maskinpresisjon skape problemer. Relativ feil av samme størrelsesorden som maskinepsilon ($\approx 2.2\dot{1}0^{-16}$ for *double*) er vanligvis ikke forårsaket av den numeriske metoden.

Vi sier at et nullpunkt $x^\star$ av $f(x)$ har multiplisitet m dersom det eksisterer en funksjon $q(x)$ slik at

$$f(x) = (x - x^\star)^m q(x), \qquad q(x^\star) \neq 0,$$

noe som er tilfelle hvis og bare hvis

$$f(x^\star) = f'(x^\star) = \cdots = f^{(m-1)}(x^\star) = 0, \qquad f^{(m)}(x^\star) \neq 0.$$

b) Hvilken multiplisitet har løsningene av de tre ligningene i punkt **a)**?

c) Anta at $x^\star$ er et nullpunkt med multiplisitet m av funksjonen $f(x)$. Vis at funksjonen

$$\mu(x) = f(x)/f'(x)$$

har et enkelt nullpunkt i $x^\star$, uavhengig av m. Bruk dette til å finne et iterasjonsskjema som konvergerer kvadratisk mot $x^\star$.

d) Test det nye skjemaet på funksjonene *ii)* og *iii)* i **a)**.

e) Gjenta oppgave **a)** med sekantmetoden i stedet for Newtons metode.

Oppgave 2

Betrakt ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= 1, \\
x_1^3 - x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Denne har to løsninger, én i området $-1 \leq x_1, x_2 \leq 0$ og én i $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

a) Velg passende startverdier og gjør to iterasjoner for hånd med Newtons metode.

b) Verifiser at du får riktig svar ved hjelp av MATLAB.

c) Forklar hva som skjer hvis du velger startverdi liggende på x_2-aksen.

Oppgave 3

Betrakt det lineære ligningssystemet $Ax = b$, hvor A er en $N \times N$ matrise, $x, b \in \mathbf{R}^N$ og $\det(A) \neq 0$. La $x(\varepsilon)$ være løsningen av det perturberte ligningssystemet

$$
(A + \varepsilon\, F)\, x(\varepsilon) \;=\; (b + \varepsilon\, v),
$$

hvor $\varepsilon > 0$ er liten, F en $N \times N$ matrise og $v \in \mathbf{R}^N$.

a) Vis at hvis ε er tilstrekkelig liten og $\det(A) \neq 0$ så er $\det(A + \varepsilon F) \neq 0$, slik at løsningen $x(\varepsilon)$ av det perturberte ligningssystemet eksisterer og er unik.
Hint. Vis først at $\det(A + \varepsilon F)$ er et polynom av grad N i ε. Se hva som skjer når $\varepsilon \to 0$.

Begynn med tilfellet $N = 2$.

b) Vis at komponentene av $x(\varepsilon)$ er kontinuerlige funksjoner av ε og er deriverbare i 0.
Hint. Du kan bruke Cramers regel til å uttrykke komponentene av $x(\varepsilon)$ som kvotienter mellom determinanter av matriser, og observere at disse determinantene er polynomer av grad N i ε. Prøv først med $N = 2$.