TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Løsningsforslag øving 2

Oppgave 1

Vi bruker følgen fra definisjon 1.4 med $\varepsilon_k = |x_k - 0| = x_k$.

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1}}{x_k} &= \frac{2^{-(k+1)^\alpha}}{2^{-k^\alpha}} \\ &= 2^{k^\alpha-(k+1)^\alpha}\end{aligned}$$

Vi ser på eksponenten og skriver om ved hjelp av den generaliserte binomialrekken

$$\begin{aligned}k^\alpha - (k+1)^\alpha &= k^\alpha - k^\alpha\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha \\ &= k^\alpha - k^\alpha\left(1+\alpha k^{-1} + \binom{\alpha}{2}k^{-2} + \cdots\right) \\ &= -\alpha k^{\alpha-1} - \binom{\alpha}{2}k^{\alpha-2} - \cdots\end{aligned}$$

Rekken konvergerer for $k > 1$, og vi ser at den dominerende termen når $k \to \infty$ er $-\alpha k^{\alpha-1}$. Derfor

$$\lim_{k\to\infty} k^\alpha - (k+1)^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha < 1, \\ -1, & \alpha = 1, \\ -\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Siden 2^x er kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$ og $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$, får vi

$$\mu = \lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} 1, & \alpha < 1, \\ \frac{1}{2}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

I følge definisjonen konvergerer (x_k) sublineært for $\alpha < 1$, lineært for $\alpha = 1$ og superlineært for $\alpha > 1$.

Oppgave 2

I følge notatet om ikke-lineære ligninger er det tilstrekkelig å vise de to betingelsene

$$G(D) \subseteq D \tag{1}$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{3} \bar{g}_{ij} < 1, \qquad \text{der} \qquad \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \le \bar{g}_{ij} \quad \text{for } x \in D. \tag{2}$$

Det er forholdsvis lett å se at:

$$
\begin{aligned}
g_1(1,1,x_3) \approx 0{,}34 < g_1(x_1,x_2,x_3) \leq 0{,}5 = g_1(0,x_2,x_3) \\
g_2(0,x_2,-1) \approx -0{,}048 < g_2(x_1,x_2,x_3) < 0{,}09 \approx g_2(1,x_2,1) \\
g_3(-1,1,x_3) \approx -0{,}61 < g_3(x_1,x_2,x_3) < -0{,}49 \approx g_2(1,1,x_3)
\end{aligned}
$$

så (1) er oppfylt. Likeledes kan vi vise at

$$
\begin{array}{lll}
\left|\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| < 0{,}281 & \left|\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| < 0{,}281 & \left|\dfrac{\partial g_1}{\partial x_3}\right| = 0 \\
\left|\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| < 0{,}067 & \left|\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\right| = 0 & \left|\dfrac{\partial g_2}{\partial x_3}\right| < 0{,}119 \\
\left|\dfrac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| < 0{,}136 & \left|\dfrac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| < 0{,}136 & \left|\dfrac{\partial g_3}{\partial x_3}\right| = 0
\end{array}
$$

for alle $x \in D$. Det betyr at

$$
\max_i \sum_{j=1}^{3} \bar{g}_{ij} = \max\{0.562, 0.186, 0.272\} = 0{,}562 < 1
$$

så betingelse (2) er også oppfylt. Test dette selv numerisk.

Oppgave 3

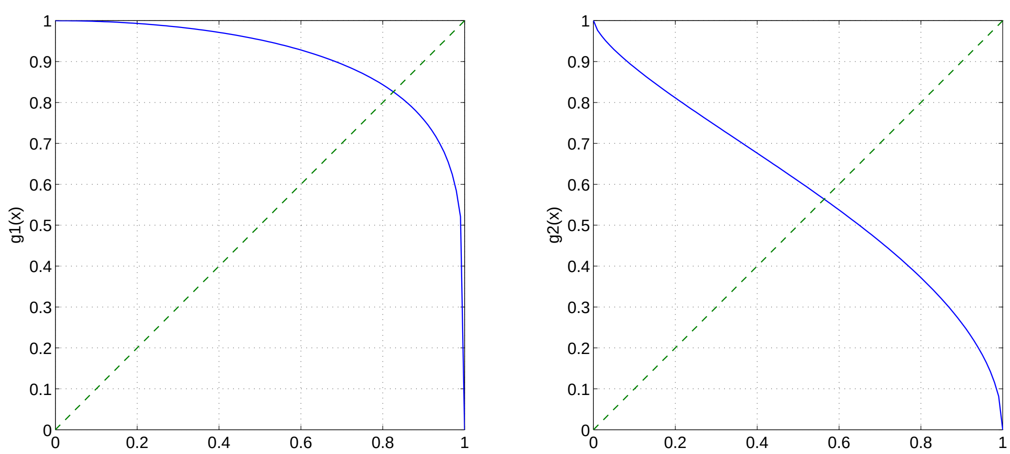
Fikspunktiterasjonene er gitt ved

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \sqrt[3]{x_2^{(k)}} \qquad & x_1^{(k+2)} &= \sqrt[6]{1-[x_1^{(k)}]^2} \\
x_2^{(k+1)} &= \sqrt{1-[x_1^{(k)}]^2} \qquad & x_2^{(k+2)} &= \sqrt{1-[x_2^{(k)}]^{2/3}}
\end{aligned}
$$

så vi kan egentlig se på dette som fikspunktiterasjoner på to skalare ligninger, med formuleringene

$$
x = g_1(x) = \sqrt[6]{1-x^2}, \qquad x = g_2(x) = \sqrt{1-x^{2/3}}.
$$

Start med å lokalisere fikspunktene. Det kan gjøres ved å lage et enkelt plott:



Dette viser at g_1 har et fikspunkt nær 0,8, og g_2 et nær 0,5. For hver av disse trenger vi å finne et intervall $[a, b]$ slik at *i)* $g_i([a, b]) \subseteq [a, b]$ og *ii)* $|g_i'(x)| < 1$ for $x \in [a, b]$.

La oss se på g_1 først. Vi ser at

$$g_1'(x) = -\frac{x}{3(1-x^2)^{5/6}}, \qquad |g'(x)| < 1 \text{ for } 0 \leq x \leq 0{,}87.$$

Men dette intervallet tilfredsstiller ikke *i)*. Imidlertid er g_1 monotont avtagende. Etter litt prøving og feiling finner vi at

$$g_1([0.76, 0.87]) \subseteq [0.76, 0.87].$$

Tilsvarende kan vi vise at de to betingelsene er oppfylt for g_2 på intervallet $[0.22, 0.80]$. Vi har altså vist at ligningen har et entydig fikspunkt på området

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0.76 \leq x_1 \leq 0.87, 0.22 \leq x_2 \leq 0.80\}$$

og iterasjonene konvergerer for all startverdier i dette området.

Oppgave 4

Skriv opp iterasjonskjemaet på formen

$$Q\mathbf{x}^{(k+1)} = (Q - A)\mathbf{x}^{(k)} + b$$

der

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad (Q - A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{og} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{x}^{(k)} = [x_k, y_k, z_k]^T$. Finn $T = Q^{-1}(Q - A)$ og A, og vis at $\|T\|_\infty = 0{,}75$. Da konvergerer iterasjonsskjemaet for alle startverdier. Videre har vi at $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, hvor $\mathbf{x}$ er løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = b$. Den eksakte løsningen er $\boldsymbol{x} = [1/9, 1/9, -4/3]$. Denne kan finnes ved å iterere til konvergens, eller ved å løse ligningssystemet med Gauss-eliminasjon.

Ved å bruke teorem 1.1 fra notatet om ikke-lineære ligninger, med $D = \mathbb{R}^3$ og $L = \|T\|_\infty$ får vi

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{\|T\|_\infty^k}{1 - \|T\|_\infty} \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-4}.$$

Gjør én iterasjon for å finne $\mathbf{x}^{(1)}$, sett inn for $\|T\|_\infty$, og du ser at etter 37 iterasjoner er feilen liten nok. Slike feilgrenser er stort sett alltid svært konservative, og antagelig kan en klare seg med færre iterasjoner.

Oppgave 5

a)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 0{,}5 \\ 1{,}26 \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}08 \\ 1{,}06 \\ 1{,}06 \end{bmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ 1{,}03333 \\ 0{,}98267 \end{bmatrix}$$

Iterasjonene konvergerer, noe som stemmer med det faktum at systemet er strengt diagonaldominant.

b)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ -5{,}3 \\ -17{,}3 \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 9{,}20 \\ -115{,}1 \\ -339{,}1 \end{bmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 153{,}07 \\ -2155{,}7 \\ -6317{,}0 \end{bmatrix}$$

Iterasjonene divergerer. Du kan regne ut spektralradien til iterasjonsmatrisen i MATLAB, den er $\rho(T) = 18{,}58$, noe som utvilsomt medfører divergens.

Legg merke til at ligningssystemet er det samme, vi har bare byttet om rekkefølgen til ligningene.

Oppgave 6

Se løsningsforslaget til eksamensoppgaven.