TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Øving 2

Oppgave 1

Betrakt følgen

$$x_k = 2^{-k^\alpha}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

med $\alpha > 0$. Vi ser lett at

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

Bruk Definition 1.4 i S&M og diskuter konvergensen til (x_k) for ulike α. Når konvergerer den lineært? Superlineært? Sublineært?

Ekstra: Bruk Definition 1.7 i S&M. Konvergerer følgen med orden $q > 1$ for noen α?

Oppgave 2

Gitt

$$G(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cos(x_1 x_2) + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1{,}06} - 0{,}1 \\ -\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{bmatrix}$$

Vis at fikspunktiterasjonene $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ konvergerer mot et unikt fikspunkt for alle startverdier $x^{(0)}$ i $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2, 3\}$.

Verifiser resultatet numerisk.

Oppgave 3

Betrakt ligningssystemet fra forrige øving,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$
$$x_1^3 - x_2 = 0.$$

Denne har to løsninger, en i området $-1 \leq x_1, x_2 \leq 0$ og en i $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Det er mulig å vise numerisk at iterasjonsskjemaet basert på formuleringen

$$x_1 = \sqrt[3]{x_2},$$
$$x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$$

konvergerer ved valg av passende startverdier.

Forklar hvorfor. Hvordan vil du velge startverdier?

Hint: Det er enklere å analysere resultater hvis du ser to påfølgende iterasjoner under ett.

Oppgave 4

Gitt følgende iterasjonsskjema:

$$\begin{aligned} 4x_{k+1} &= -x_k - y_k + z_k + 2 \\ 6y_{k+1} &= 2x_k + y_k - z_k - 1 \\ -4z_{k+1} &= -x_k + y_k - z_k + 4 \end{aligned}$$

Vis at $\mathbf{x}^{(k)} = [x_k, y_k, z_k]^T$ konvergerer mot en grense $\mathbf{x}$ for alle startverdier $\mathbf{x}^{(0)}$ når $k \to \infty$. Finn grensen $\mathbf{x}$.

Hvor mange iterasjoner kreves maksimalt for at $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq 10^{-4}$ hvis $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$? Er grensen realistisk, eller kan du antagelig klare deg med færre iterasjoner?

Oppgave 5

Løs de to ligningssystemene med Gauss–Seidel-iterasjoner:

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5 \\ x + 3y - z &= 3 \\ 3x + y - 5z &= -1 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5 \\ 3x + y - 5z &= -1 \\ x + 3y - z &= 3. \end{aligned} \tag{2}$$

Bruk $[0.1, 0.1, 0.1]^T$ som startvektor. Gjør først et par iterasjoner for hånd, deretter kan du bruke MATLAB-programmet `gs.m`.

Kommenter resultatene og se om de stemmer med teorien.

Oppgave 6

Eksamensoppgave: Desember 2008, oppgave 5.