

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Løsningsforslag øving 4

Oppgave 1

a) Tabellen over dividerte differenser blir ($f[x_i] = y_i$):

| x_i | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ |
|-------|----------|-------------------|----------------------------|
| 0 | 1 | | |
| 2 | 2 | 1/2 | |
| 3 | 4 | 2 | 1/2 |

og vi ender med polynomet

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$

b) Vi beholder tabellen fra **a)**, og legger bare til en rad i tabellen:

| x_i | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|-------|----------|-------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| 0 | 1 | | | |
| 2 | 2 | 1/2 | | |
| 3 | 4 | 2 | 1/2 | |
| 1 | 0 | 2 | 0 | -1/2 |

Polynomet blir

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2) - \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 1.$$

Oppgave 2

a) Ekvidistante noder: $x_i = ih$, $i = 0, \dots, 3$ med $h = \pi/3$. Vi skal da interpolere punktene i tabellen

| x_i | 0 | $\pi/3$ | $2\pi/3$ | π |
|----------|---|--------------|--------------|-------|
| $f(x_i)$ | 0 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 0 |

Resultat:

$$p_3(x) = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi^2}(-x^2 + \pi x),$$

med feilgrense (se øving 3, oppg. 3)

$$|\sin(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \approx 0.0752$$

- b) Chebyshev-nodene er gitt ved: $x_i = \pi/2 + (\pi/2) \cos((2i + 1)\pi/8)$ når $n = 3$. Det gir tabellen

| | | | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| x_i | 3.022022903 | 2.171914057 | 0.9696785970 | 0.119569751 |
| $f(x_i)$ | 0.1192850409 | 0.8247039815 | 0.8247039818 | 0.1192850413 |

Polynomet blir

$$p_3(x) = -0.4043173324x^2 + 1.270200363x - 0.0268120051$$

med feilgrense

$$|\sin(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{8 \cdot 4!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \approx 3.171 \cdot 10^{-2}.$$

- c) Vi har $M_n = \max_{x \in [0, \pi]} |f^{(n+1)}(x)| = 1$.

Ekvidistante noder:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+1}$$

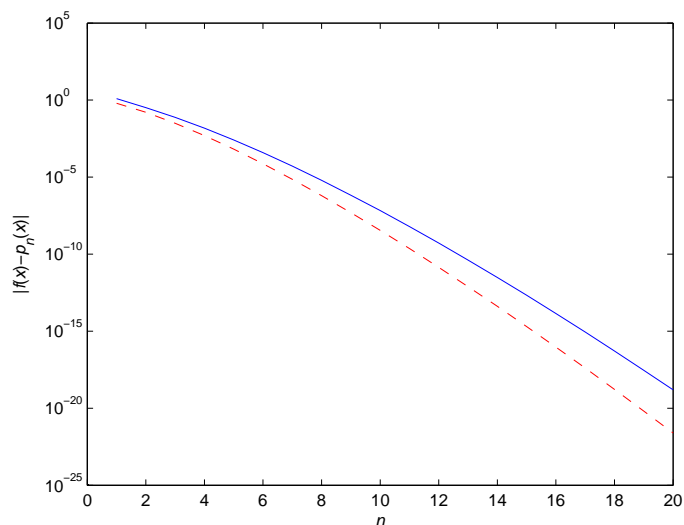
Chebyshev-noder: Variabelskiftet fører til at

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{i=0}^n (t - t_i) \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{2^n}$$

slik at feilgrensen blir:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \frac{2}{(n+1)!}.$$

Av figur 1 ser vi at Chebyshev-noder gir en lavere feilgrense enn ekvidistante noder.



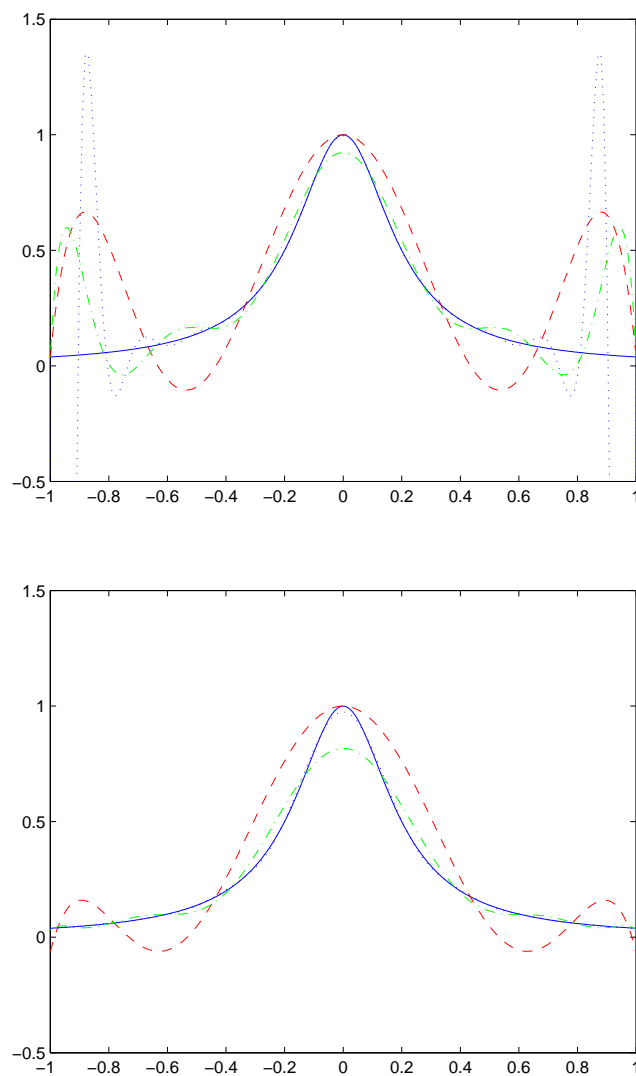
Figur 1: Heltrukken: ekvidistante noder, stiplet: Chebyshev-noder.

Oppgave 3

Se vedlagte MATLAB-filer.

Oppgave 4

I figur 2 ser vi at ekvidisitante noder gir katastrofalt resultat for tilnærming av Runges funksjon. Jo større vi velger n , jo større utsving får vi nær -1 og 1 . Chebyshev-noder gir derimot god tilpasning i hele intervallet, og jo større vi velger n , jo bedre blir tilpasningen.



Figur 2: Øverst: ekvidisitante noder, nederst: Chebyshev-noder. Heltrukken: Runges funksjon, stiplet: $n = 6$, prikket/stiplet: $n = 11$, prikket: $n = 21$.

Oppgave 5

- a) Vi har: $f[x_0] = \Delta^0 f = f_0$ og $f[x_0, x_1] = (f_1 - f_0)/h$, så antakelsen er riktig for $k = 0, 1$. Vi antar nå at hypotesen er riktig for en vilkårlig k , og skal vise at den da også gjelder for $k + 1$. Vi har:

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_k, x_{k+1}] &= \frac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \\ &= \frac{\frac{1}{k!h^k}(\Delta^k f_1 - \Delta^k f_0)}{(k+1)h} = \frac{1}{(k+1)!h^{k+1}}\Delta^{k+1}f_0. \end{aligned}$$

- b) Siden $x = x_0 + sh$ er $x_i = x_0 + ih$, slik at

$$\prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i) = h^k \prod_{i=0}^{k-1} (s - i) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

- c) Sett resultatene fra a) og b) inn i den kjente formelen

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i).$$

- d) Sorter nodene i stigende rekkefølge. Vi får da følgende tabell over foroverdifferanser:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ 0 & & 3 & \\ & 2 & & -3 \\ 2 & & 0 & \\ & 2 & & \\ 4 & & & \end{array}$$

og polynomet blir

$$p(x) = p(x_0 + sh) = 1 - \binom{s}{1} + 3 \binom{s}{2} - 3 \binom{s}{3} = 1 - s + 3 \frac{s(s-1)}{2} - 3 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!},$$

det samme polynomet som i oppgave 1b), siden $x_0 = 0$ og $h = 1$ i dette tilfellet.