TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Øving 4

Oppgave 1

a) Bruk dividerte differanser og Newtons interpolasjonsformel for å finne polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene i tabellen:

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 4 \end{array}.$$

b) Legg til punktet $(1, 0)$ til tabellen i punkt **a)**. Hva blir interpolasjonspolynomet nå?

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du approksimere $\sin(x)$ på intervallet $[0, \pi]$ ved hjelp av polynominterpolasjon.

a) Velg 4 ekvidistante noder på intervallet. Finn polynomet, og en øvre grense for feilen $|\sin(x) - p_3(x)|$.

b) Gjenta punkt **a)**, men bruk Chebyshev-noder i stedet (se hint). (Du er ikke nødt til å regne ut polynomet, men sett opp interpolasjonspunktene).

c) I de to tilfellene (ekvidistante og Chebyshev-noder), finn et uttrykk for en øvre grense for feilen uttrykt ved n (polynomets grad). Plott feilgrensen som funksjon av n og sammenlign de to tilfellene.

Hint: Chebyshev-nodene er definert på intervallet $[-1, 1]$. For å flytte dem over på et vilkårlig intervall $[a, b]$ brukes variabelskiftet

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \qquad t \in [-1, 1].$$

Feilformelen justeres tilsvarende.

Oppgave 3

Skriv to funksjoner i MATLAB, en som beregner tabellen over dividerte differanser basert på et gitt datasett, og en som beregner verdier av interpolasjonspolynomet i gitte punkter, basert på denne tabellen. F.eks.

```
function tab = divdiff(x, y)
```

og

```
function y = pval(tab, t)
```

hvor `t` kan være en vektor.

Her kan iterert multiplikasjon være nyttig. La

$$p(x) = f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Definer polynomene $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$ ved

$$\begin{aligned} b_n(x) &= f_n \\ b_{n-1}(x) &= f_{n-1} + (x - x_{n-1})b_n(x) \\ &\vdots \\ b_0(x) &= f_0 + (x - x_0)b_1(x) \end{aligned}$$

Da vil $b_0(x) = p(x)$. Dette sees lett ved å sette inn for $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)$ i b_0 og gange ut.

Test funksjonene på datasettet i oppgave 1.

Oppgave 4

Gitt Runges funksjon $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $x \in [-1, 1]$. Finn og plott polynomet som interpolerer f i ekvidistante noder. Bruk $n = 6, 11$ og 21. Bruk MATLAB-funksjonen `polyfit`. Denne funksjonen genererer et polynom av grad n som interpolerer de oppgitte datapunktene. Polynomet blir interpolasjonspolynomet hvis vi bruker $n + 1$ datapunkter og polynomgraden er n. Bruk `polyval` for å evaluere interpolasjonspolynomet på et ønsket utvalg av verdier, og plott resultatet.

Gjenta eksperimentet med Chebyshev-noder. Kommenter resultatet.

Oppgave 5

La avstanden h mellom nodene være gitt, slik $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Sett $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

På en slik følge av f'er kan vi definere en *foroverdifferanse* rekursivt ved

$$\Delta^0 f_0 = f_0, \quad \Delta f_0 = f_1 - f_0, \qquad \Delta^k f_0 = \Delta(\Delta^{k-1} f_0) = \Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Vi får da at

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0, \qquad \Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0, \qquad \text{osv.}$$

La $x = x_0 + sh$, der $s \in \mathbb{R}$. Oppgaven går ut på å vise at interpolasjonspolynomet som interpolerer f i nodene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ kan skrives som

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \tag{1}$$

hvor

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

a) Vis ved induksjon:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0.$$

b) Vis at

$$\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = k!h^k \binom{s}{k}, \qquad k \geq 1.$$

c) Bruk resultatene fra **a)** og **b)** til å vise Newtons foroverdifferanseformel (1)

d) Anvend formelen på datasettet i oppgave **1b)**.

Kommentar: Tilsvarende går det an å vise *Newtons bakoverdifferanseformel*. Bakoverdifferanser på følgen $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ er definert ved

$$\nabla^0 f_n = f_n, \qquad \nabla f_n = f_n - f_{n-1}, \qquad \nabla^k f_n = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Newtons bakoverdifferanseformel er gitt ved

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f_n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n.$$

Forslag til noen relevante eksamensoppgaver:

Dere som ønsker litt flere oppgaver/eksempler kan ta en titt på følgende eksamensoppgaver:

Desember 2007, oppg. 1.
Desember 2006, oppg. 1.
August 2005, oppg. 2.