TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Løsningsforslag øving 5

Oppgave 1

Vi studerer Hermite-interpolasjon som karakteriseres ved at et polynom $p(x)$ definert på $n+1$ distinkte noder $x_0, x_1, \dots, x_n$ tilfredsstiller betingelsene

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = v_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{1}$$

der $\{y_i\}_{i=0}^n$ og $\{v_i\}_{i=0}^n$ er vilkårlige, spesifiserte verdier.

a) Det er rimelig å anta $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ siden (1) spesifiserer $2n+2$ betingelser (2 betingelser for hvert av $n+1$ punkter). Et polynom av grad $2n+1$ kan generelt representeres ved

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

og har følgelig $2n+2$ parametre $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$. Vi kan dermed bruke betingelsene (1) til entydig å bestemme disse parametrene.

b) Vi antar at de foreløpig uspesifiserte funksjonene $A_i(x)$ og $B_i(x)$, alle definert for $i = 0, 1, \dots, n$, tilfredsstiller

$$\begin{aligned} A_i(x_j) &= \delta_{ij}, & B_i(x_j) &= 0, \\ A_i'(x_j) &= 0, & B_i'(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

for alle $i, j = 0, 1, \dots, n$. Vi definerer funksjonen $g(x)$ som oppgitt ved

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} v_i B_i(x). \tag{3}$$

Merk: Vi har foreløpig ikke sagt *noe* om hvilken type funksjon $A_i(x)$ og $B_i(x)$ er, bare at de skal tilfredsstille betingelsene (2).

Gitt funksjonen $g(x)$ i (3) finner vi spesielt for vilkårlig $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} g(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} v_i B_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ij} + \sum_{i=0}^{n} v_i \cdot 0 = y_j, \\ g'(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} y_i A_i'(x_j) + \sum_{i=0}^{n} v_i B_i'(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot 0 + \sum_{i=0}^{n} v_i \delta_{ij} = v_j. \end{aligned}$$

Vi har dermed vist at en funksjon $g(x)$ som definert i (3) oppfyller (1) såfremt *basisfunksjonene* $A_i(x)$ og $B_i(x)$ tilfredsstiller (2).

c) Vi ser nå på mulige representasjoner av basisfunksjonene $A_i(x)$ og $B_i(x)$. Spesielt ser vi på basisfunksjoner $A_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$ og $B_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$. Vi bruker kardinalfunksjonene

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

som tilfredsstiller $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ og studerer spesielt funksjonene

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x), \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \tag{4}$$

Det er da åpenbart at $A_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$ og $B_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$. Vi finner videre at

$$\begin{aligned}
A_i'(x) &= -2L_i'(x_i)L_i^2(x) + 2\big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i(x)L_i'(x) \\
&= 2L_i(x)L_i'(x)\big(1 - L_i(x) - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big) \\
B_i'(x) &= L_i^2(x) + 2(x - x_i)L_i(x)L_i'(x) = L_i(x)\big(L_i(x) + 2(x - x_i)L_i'(x)\big).
\end{aligned}$$

Da ser vi videre lett at polynomene $A_i(x)$ og $B_i(x)$ tilfredsstiller (2) for alle $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Polynomene (4) er altså polynomer av grad $2n + 1$ som tilfredsstiller de nødvendige basisbetingelsene og følgelig kan brukes som basisfunksjoner for å konstruere *polynomer* av grad $2n + 1$ som tilfredsstiller betingelsene (1).

d) Vi skal finne et tredjegradspolynom $p(x)$ som tilfredsstiller

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 3, \quad p(2) = 14, \quad p'(2) = 24.$$

I dette tilfellet er $2n + 1 = 3 \Rightarrow n = 1$ og vi finner spesielt

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-2}{1-2} = 2 - x, & L_1(x) &= \frac{x-1}{2-1} = x - 1 \\
L_0'(x) &= -1, & L_1'(x) &= 1 \\
L_0^2(x) &= x^2 - 4x + 4, & L_1^2(x) &= x^2 - 2x + 1
\end{aligned}$$

Fra representasjonen (4) finner vi da

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= \big(1 - 2(x - 1)\cdot(-1)\big)(x^2 - 4x + 4) = (2x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\
A_1(x) &= \big(1 - 2(x - 2)\cdot 1\big)(x^2 - 2x + 1) = (5 - 2x)(x^2 - 2x + 1) \\
B_0(x) &= (x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\
B_1(x) &= (x - 2)(x^2 - 2x + 1).
\end{aligned}$$

Da er tredjegradspolynomet som tilfredsstiller betingelsene over gitt ved

$$\begin{aligned}
p(x) = {} & (2x - 1)(x^2 - 4x + 4) + 3\cdot(x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\
& + 14\cdot(5 - 2x)(x^2 - 2x + 1) + 24\cdot(x - 2)(x^2 - 2x + 1) \\
= {} & x^3 + 6x^2 - 12x + 6.
\end{aligned}$$

Det siste resultatet følger ved litt regning.

Oppgave 2

La $s(x)$ være en splinefunskjon på den oppgitte formen. Da er $s(x)$ en kontinuerlig funksjon som på intervallet $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ sammenfaller med en lineær funksjon $s_j(x) = \gamma_j(x - x_j) + \delta_j$.

Vi prøver å velge $\beta, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ slik at formelen holder på hvert intervall I_j.

Vi ser at $(x - x_j)^+$ er null for $x \leq x_j$ og sammenfaller med linja med stigningstall 1 gjennom x_j for $x > x_j$. På intervallet I_j er

$$(x - x_i)^+ = \begin{cases} x - x_i, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases},$$

så uttrykket til høyre for likhetstegnet er lik $\beta + \sum_{i=0}^{j} \alpha_i (x - x_i)$ på I_j.

På intervallet I_0 ser vi at $(x - x_i)^+ = 0$ for alle $i > 0$, og for at likheten skal holde må vi ha

$$s_0(x) = \gamma_0(x - x_0) + \delta_0 = \beta + \alpha_0(x - x_0),$$

altså må $\beta = \delta_0$, $\alpha_0 = \gamma_0$.

Vi fortsetter med induksjon og antar at formelen holder på I_j, altså

$$s_j(x) = \gamma_j(x - x_j) + \delta_j = \beta + \sum_{i=0}^{j} \alpha_i (x - x_j).$$

For at formelen skal holde på I_{j+1} må vi ha

$$s_{j+1}(x) = \gamma_{j+1}(x - x_{j+1}) + \delta_{j+1} = s_j(x) + \alpha_{j+1}(x - x_{j+1})$$

Vi vet at $s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1})$ siden $s(x)$ er kontinuerlig, så de lineære funksjonene $\gamma_{j+1}(x - x_{j+1}) + \delta_{j+1}$ og $s_j(x) + \alpha_{j+1}(x - x_{j+1}) = \delta_j + \gamma_j(x - x_j) + \alpha_{j+1}(x - x_{j+1})$ er like om de har samme stigningstall. Setter vi $\alpha_{j+1} = \gamma_{j+1} - \gamma_j$ får vi nettopp dette.

Oppgave 3

Betrakt i slik at $|s_i''| = \max_l |s_l''|$, og betrakt ligning i i det lineære systemet som brukes til å beregne de naturlige kubiske spliner:

$$hs_{i-1}'' + 4hs_i'' + hs_{i+1}'' = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\right).$$

Ved å bruke at $|s_i''| = \max_l |s_l''|$ og Taylors teorem, så har vi

$$4h|s_i''| \leq h|s_{i-1}''| + h|s_{i+1}''| + 6|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})| \leq 2h|s_i''| + 6|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|$$

og dermed

$$h|s_i''| \leq 3|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|,$$

med $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$, $\eta_{i-1} \in (x_{i-1}, x_i)$. I tillegg har vi

$$|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})| = \frac{|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|}{|\eta_i - \eta_{i-1}|}|\eta_i - \eta_{i-1}| \leq |2hf''(\xi)| \leq 2h\|f''\|_\infty,$$

slik at vi får

$$|s_i''| \leq 6\|f''\|_\infty.$$

Anvendelse av resultatet i oppgave 3

Under antagelsene i oppgave 3 ønsker vi nå å bevise feilskranken

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{7}{8} h^2 \|f''\|_\infty. \tag{5}$$

Betrakt intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, og la $\bar{x} \in (x_{i-1}, x_i)$. Betrakt funksjonen

$$g(x) := f(x) - s(x) - \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})}\big(f(\bar{x}) - s(\bar{x})\big).$$

Vi har $g(x_i) = 0$, $g(x_{i-1}) = 0$ og $g(\bar{x}) = 0$, så $g''(x)$ har minst ett nullpunkt $\bar{\xi}_i \in (x_{i-1}, x_i)$ slik at vi får

$$0 = f''(\bar{\xi}_i) - s''(\bar{\xi}_i) - \frac{2}{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})}\big(f(\bar{x}) - s(\bar{x})\big),$$

og

$$f(\bar{x}) - s(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})}{2}\big(f''(\bar{\xi}_i) - s''(\bar{\xi}_i)\big).$$

Siden $s''(x)$ er et lineært polynom på $[x_{i-1},\, x_i]$, (en linje mellom (x_{i-1}, s''_{i-1}) og (x_i, s''_i)) så er

$$|s''(\bar{\xi}_i)| \leq \max\{|s''_{i-1}|, |s''_i|\}, \quad \forall i.$$

Man kan også lett vise (se øving 3, oppgave 3) at

$$|(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1})| \leq \frac{h^2}{4},$$

hvilket leder til

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 (\|f''\|_\infty + \max_i |s''_i|).$$

Sammen med resultatet fra oppgave 3 gir dette (5).