TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Øving 5

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven studere *Hermite-interpolasjon.*

Gitt $n+1$ distinkte noder $x_0, x_1, \ldots, x_n$ skal vi finne et polynom $p(x)$, av lavest mulig grad, som tilfredsstiller

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = v_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

for vilkårlige verdier y_i og v_i.

a) Hvorfor er det rimelig å anta at $p(x)$ vil være av grad mindre enn eller lik $2n+1$, dvs. $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$?

b) Vis at en funksjon $g(x)$ gitt ved

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} v_i B_i(x)$$

tilfredsstiller betingelsene (1) dersom funksjonene $A_i(x)$ og $B_i(x)$ oppfyller

$$\begin{aligned} A_i(x_j) &= \delta_{ij}, \quad & B_i(x_j) &= 0, \\ A_i'(x_j) &= 0, \quad & B_i'(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

hvor $\delta_{ij} = 1$ når $j = i$ og 0 ellers.

c) La $L_i(x)$ være de vanlige kardinalfunksjonene i Lagrange-interpolasjon. Vis at følgende polynomer tilfredsstiller (2) for alle $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x), \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x).$$

d) Bruk dette til å finne et tredjegradspolynom $p(x)$ som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} p(1) &= 1, \quad & p(2) &= 14 \\ p'(1) &= 3, \quad & p'(2) &= 24. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vis at en generisk splinefunksjon $s(x)$ av grad 1 på $[a, b]$ og nodene $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, kan skrives som

$$s(x) = \beta + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (x - x_i)^+,$$

der

$$(x - x_i)^+ = \begin{cases} 0, & x \leq x_i, \\ x - x_i, & x_i < x. \end{cases}$$

Oppgave 3

Betrakt en naturlig kubisk splinefunksjon $s(x)$ på $[a, b]$ og ekvidistante noder $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Anta at s interpolerer $f \in C^2[a, b]$ på $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Vis at

$$|s_i''| \leq 6\|f''\|_\infty,$$

der $s_i'' := s''(x_i)$ og $\|f''\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Hint: Bruk ligning i i ligningsystemet som må løses for å lage de naturlige kubiske spliner. Vis også og bruk følgende egenskap:

$$|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})| \leq 2h\|f''\|_\infty,$$

der $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$ og $\eta_{i-1} \in (x_{i-1}, x_i)$.

Oppgave 4

Bevis Theorem 11.3 s. 300 i S&M.

Hint: Les beviset av Theorem 11.2 s. 296.