

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Løsningsforslag øving 6

Oppgave 1

La $R(n-1, 0) = T(2h)$ og $R(n, 0) = T(h)$, med $m = 2^n$, $h = (b-a)/m$, og

$$T(h) = h \left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_m) \right), \quad x_i = a + ih, i = 0, \dots, m.$$

Rekursiv trapes gir

$$T(h) = \frac{T(2h)}{2} + h \sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}).$$

Romberg-algoritmen gir

$$\begin{aligned} R(n, 1) &= \frac{4}{3}R(n, 0) - \frac{1}{3}R(n-1, 0) = \frac{4}{3} \left(\frac{T(2h)}{2} + h \sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}) \right) - \frac{T(2h)}{3} \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}) + f(x_m) \right). \end{aligned}$$

Oppgave 2

Det blir ikke gitt noe løsningsforslag for denne oppgaven. Se eksamen 2008, oppg. 2.

Oppgave 3

La $T_1 = T(a, b) = (b-a)(f(a) + f(b))/2$, og $T_2 = T(a, c) + T(c, b)$, der $c = (a+b)/2$. Vi vet at

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= T_1 - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_1), \\ \int_a^b f(x) dx &= T_2 - \frac{(b-a)^3}{12 \cdot 2^3} (f''(\eta_1) + f''(\eta_2)), \end{aligned}$$

der $\xi_1 \in (a, b)$, $\eta_1 \in (a, c)$ og $\eta_2 \in (c, b)$. Antar vi at $f''(x)$ endrer seg lite over intervallet (a, b) , kan vi bruke samme argumentasjon som for adaptive Simpson, dvs. et passende feilestimat for T_2 er

$$\int_a^b f(x) dx - T_2 \approx \mathcal{E}(a, b) = \frac{1}{3}(T_2 - T_1).$$

Den adaptive trapesalgoritmen blir da:

```

function ADAPTIV-TRAPES( $f, a, b, tol$ )
   $T_1 \leftarrow T(a, b)$   $\triangleright T(a, b) = (b - a)(f(a) + f(b))/2$ 
   $c \leftarrow (a + b)/2$ 
   $T_2 \leftarrow T(a, c) + T(c, b)$ 
   $\mathcal{E} \leftarrow (T_2 - T_1)/3$ 
  if  $|\mathcal{E}| \leq tol$  then
    return  $T_2$ 
  else
     $T_l \leftarrow$  ADAPTIV-TRAPES( $f, a, c, tol/2$ )
     $T_r \leftarrow$  ADAPTIV-TRAPES( $f, c, b, tol/2$ )
    return  $T_l + T_r$ 
  end if
end function

```

Algoritmen anvendt på integralet i oppgaven gir:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $tol = 2 \cdot 10^{-3}, a = 0,0, b = 0,8$ | | | |
| $T_1 = 0,23888, T_2 = 0,18317, \mathcal{E} = -1,86 \cdot 10^{-2}$ | | | |
| $tol = 1 \cdot 10^{-3} a = 0,0, b = 0,4$ | | $tol = 1 \cdot 10^{-3} a = 0,4, b = 0,8$ | |
| $T_1 = 0,031864, T_2 = 0,0239330$ | | $T_1 = 0,15130, T_2 = 0,14611$ | |
| $\mathcal{E} = -2,6 \cdot 10^{-3}$ | | $\mathcal{E} = -1,7 \cdot 10^{-3}$ | |
| $tol = 5 \cdot 10^{-4}$ $a = 0,0, b = 0,2$ | $tol = 5 \cdot 10^{-4}$ $a = 0,2, b = 0,4$ | $tol = 5 \cdot 10^{-4}$ $a = 0,4, b = 0,6$ | $tol = 5 \cdot 10^{-4}$ $a = 0,6, b = 0,8$ |
| $T_1 = 0,004000$ | $T_1 = 0,019931$ | $T_1 = 0,051159$ | $T_1 = 0,094947$ |
| $T_2 = 0,003000$ | $T_2 = 0,018953$ | $T_2 = 0,050320$ | $T_2 = 0,094536$ |
| $\mathcal{E} = -3,3 \cdot 10^{-4}$ | $\mathcal{E} = -3,3 \cdot 10^{-4}$ | $\mathcal{E} = -2,8 \cdot 10^{-4}$ | $\mathcal{E} = -1,4 \cdot 10^{-4}$ |

Så

$$T = 0,003 + 0,018953 + 0,050320 + 0,094536 = 0,1668.$$

Oppgave 4

a)

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{e^{-1/\sqrt{3}}}{\sqrt{1-1/3}} + \frac{e^{1/\sqrt{3}}}{\sqrt{1-1/3}} = \sqrt{6} \cosh(1/\sqrt{3}) \approx 2,8692$$

b) Bruk indreproduktet $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 (f(x)g(x)/\sqrt{1-x^2}) dx$, med Chebyshev-polynomene som ortogonale polynomer. Vi velger $n = 1$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, dvs. $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$. Vektene blir

$$A_0 = \int_{-1}^1 \frac{(x - 1/\sqrt{2})}{(-1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$A_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x + 1/\sqrt{2})}{(1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Approximasjonen blir $\frac{\pi}{2}(e^{-1/\sqrt{2}} + e^{1/\sqrt{2}}) \approx 3,9603$ som er en vesentlig forbedring fra a).

c) Feilen er gitt ved

$$E = K \cdot f^{(4)}(\nu), \quad K = \frac{1}{4!} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{192}.$$

Siden $|e^x| < e$ på $(-1, 1)$, må $|E| < e\pi/192 \approx 0,044$. Til sammenligning er målt feil 0,017.

Oppgave 5

Rekursjonsformelen fra notatet gir

$$\begin{aligned} \phi_0(x) = 1, & & \langle \phi_0, \phi_0 \rangle &= \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \\ & & \langle x\phi_0, \phi_0 \rangle &= \int_0^\infty e^{-x} x dx = 1 & \Rightarrow B_1 = 1 \\ \phi_1(x) = x - 1, & & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle &= \int_0^\infty e^{-x} (x-1)^2 dx = 1 \\ & & \langle x\phi_1, \phi_1 \rangle &= 3 & \Rightarrow B_2 = 3, C_2 = 1 \\ \phi_2(x) = (x-3)\phi_1(x) - \phi_0(x) &= x^2 - 4x + 3 - 1 = x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

Oppgave 6

Vi må vise at

$$\int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^k\right)^{(k)} \left((x^2 - 1)^j\right)^{(j)} dx = 0 \quad \text{for alle } j < k.$$

Delvis integrasjon, $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ med

$$u = \left((x^2 - 1)^j\right)^{(j)}, \quad dv = \left((x^2 - 1)^k\right)^{(k)} dx$$

anvendt på integralet over gir

$$\left(\left((x^2 - 1)^k\right)^{(k-1)} \left((x^2 - 1)^j\right)^{(j)}\right)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^k\right)^{(k-1)} \left((x^2 - 1)^j\right)^{(j+1)} dx.$$

Det første leddet er lik null (se hintet). Vi bruker så delvis integrasjon en gang til på integralet. Etter å ha gjort dette totalt $j + 1$ ganger, ender vi med

$$(-1)^{j+1} \int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^k\right)^{(k-j-1)} \left((x^2 - 1)^j\right)^{(2j+1)} dx = 0$$

siden $\left((x^2 - 1)^j\right)^{(2j+1)} = 0$.