TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Løsningsforslag øving 7

Oppgave 1

a) Vi har

$$
\begin{aligned}
&\text{Eksakt løsning:} \qquad && y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\Phi\big(t_n, y(t_n); h\big) + d_{n+1},\\
&\text{Numerisk løsning:} \qquad && y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h).
\end{aligned}
$$

Ta differensen mellom disse, og bruk at den globale feilen i skritt n er gitt ved $e_n = y(t_n) - y_n$:

$$
e_{n+1} = e_n + h\Big(\Phi\big(t_n, y(t_n); h\big) - \Phi(t_n, y_n; h)\Big) + d_{n+1}.
$$

Ta normen på begge sider og bruk så trekantulikheten for normer:

$$
\begin{aligned}
\|e_{n+1}\| &= \Big\|e_n + h\Big(\Phi\big(t_n, y(t_n); h\big) - \Phi(t_n, y_n; h)\Big) + d_{n+1}\Big\| \\
&\le \|e_n\| + h\Big\|\Phi\big(t_n, y(t_n); h\big) - \Phi(t_n, y_n; h)\Big\| + \|d_{n+1}\|.
\end{aligned}
$$

Bruk deretter antagelsene som er gitt i oppgaven:

$$
\|e_{n+1}\| \le \|e_n\| + hM\|y(t_n) - y_n\| + Dh^{p+1} = (1 + hM)\|e_n\| + Dh^{p+1}.
$$

Forutsatt at $y(t_0) = y_0$ har vi nå at

$$
\begin{aligned}
\|e_1\| &\le Dh^{p+1}, \\
\|e_2\| &\le (1 + hM)Dh^{p+1} + Dh^{p+1}, \\
&\vdots \\
\|e_n\| &\le Dh^{p+1} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + hM)^i, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

slik at

$$
\|e_N\| \le Dh^{p+1} \sum_{i=0}^{N-1} (1 + hM)^i = \frac{(1 + hM)^N - 1}{1 + hM - 1} Dh^{p+1} = \frac{(1 + hM)^N - 1}{M} Dh^p.
$$

Bruk det faktum at $\mathrm{e}^x \ge 1 + x$ for $x > 0$, slik at

$$
\|e_N\| \le \frac{\mathrm{e}^{MhN} - 1}{M} Dh^p = \frac{\mathrm{e}^{M(t_{\text{end}} - t_0)} - 1}{M} Dh^p = Ch^p.
$$

Dette argumentet er gyldig uavhengig av hvilken norm som blir valgt.

b) Vi vet at f oppfyller Lipschitz-betingelsen i y, dvs.

$$\|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

Inkrementsfunksjonen $\Phi(t_n, y_n; h)$ for den oppgitte metoden er gitt som

$$\Phi(t_n, y_n; h) = b_1 k_1 + b_2 k_2.$$

Så la oss regne ut denne for to ulike startverdier y_n og $\tilde{y}_n$.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), & \tilde{k}_1 &= f(t_n, \tilde{y}_n), \\ k_2 &= f(t_n + c_2 h, y_n + hc_2 k_1), & \tilde{k}_2 &= f(t_n + c_2 h, \tilde{y}_n + hc_2 \tilde{k}_1). \end{aligned}$$

Dermed er

$$\Phi(t_n, y_n; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}_n; h) = b_1(k_1 - \tilde{k}_1) + b_2(k_2 - \tilde{k}_2).$$

Ta normen på begge sider, bruk egenskapene til en norm og Lipschitz-kontinuitet for f:

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_n, y_n; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}_n; h))\| &= \|b_1(k_1 - \tilde{k}_1) + b_2(k_2 - \tilde{k}_2)\| \\ &\leq |b_1|\|k_1 - \tilde{k}_1\| + |b_2|\|k_2 - \tilde{k}_2\| \\ &\leq |b_1|L\|y_n - \tilde{y_n}\| + |b_2|L\|y_n + hc_2 k_1 - \tilde{y}_n - hc_2\tilde{k}_1\| \\ &\leq |b_1|L\|y_n - \tilde{y_n}\| + |b_2|L(\|y_n - \tilde{y}_n\| + h|c_2|L\|y_n - \tilde{y}_n\|) \end{aligned}$$

Samler vi sammen dette og bruker $h \leq h_{\max}$, har vi vist følgende:

$$\|\Phi(t_n, y_n; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}_n; h))\| \leq M\|y_n - \tilde{y}_n\|$$

med

$$M = L(|b_1| + |b_2|) + h_{\max} L^2 |b_2 c_2|.$$

Oppgave 2

a) Vi kan skrive (4) fra oppgaveteksten som et system av to førsteordens differensialligninger ved å innføre variabelen $v = u'$. Da får vi

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ A\cos\omega t + u(1-u^2) - kv \end{pmatrix}.$$

b) Ved å skrive

$$\mathbf{u} = (u, v)^{\mathrm{T}}$$

og

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \big(v, A\cos\omega t + u(1-u^2) - kv\big)^{\mathrm{T}}$$

der superskript T betyr transponert, kan vi skrive forbedret Euler for dette problemet som

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \frac{h}{2}\Big(\mathbf{f}(t_m, \mathbf{u}_m) + \mathbf{f}\big(t_{m+1}, \mathbf{u}_m + h\mathbf{f}(t_m, \mathbf{u}_m)\big)\Big).$$

Med de gitte startverdiene har vi at

$$\mathbf{f}(t_0, \mathbf{u}_0) = \Big(v(0), A\cos(\omega \cdot 0) + u(0)\big(1 - u(0)^2\big) - kv(0)\Big)^{\mathrm{T}} = (0, A)^{\mathrm{T}},$$

og

$$\mathbf{f}\big(t_1, \mathbf{u}_0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{u}_0)\big) = \mathbf{f}\big(h, (0 + h\cdot 0, 0 + hA)^{\mathrm{T}}\big) = A(h, \cos\omega h - kh)^{\mathrm{T}}.$$

Dermed får vi

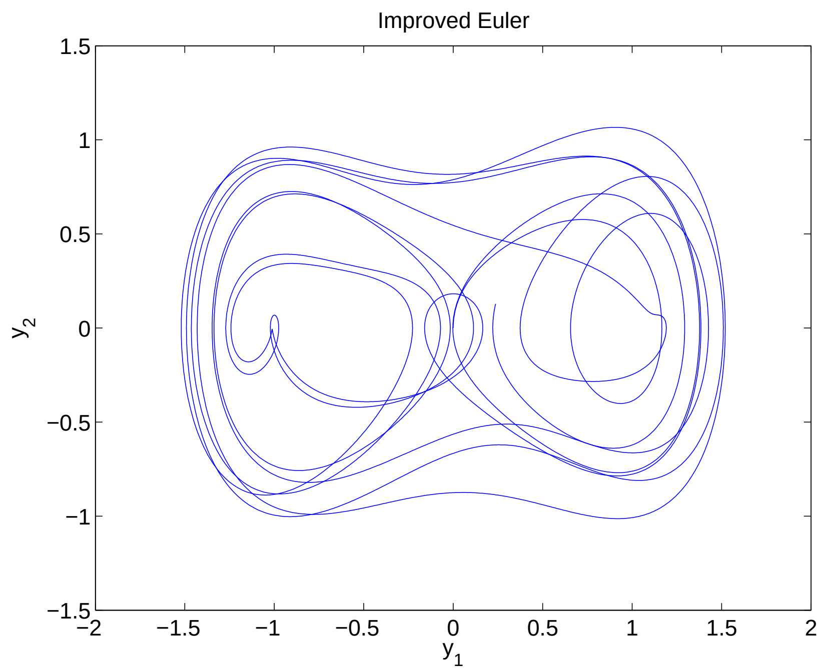
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A\frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \cos\omega h - kh \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{Ah}{2}\begin{pmatrix} h \\ 1 + \cos\omega h - kh \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

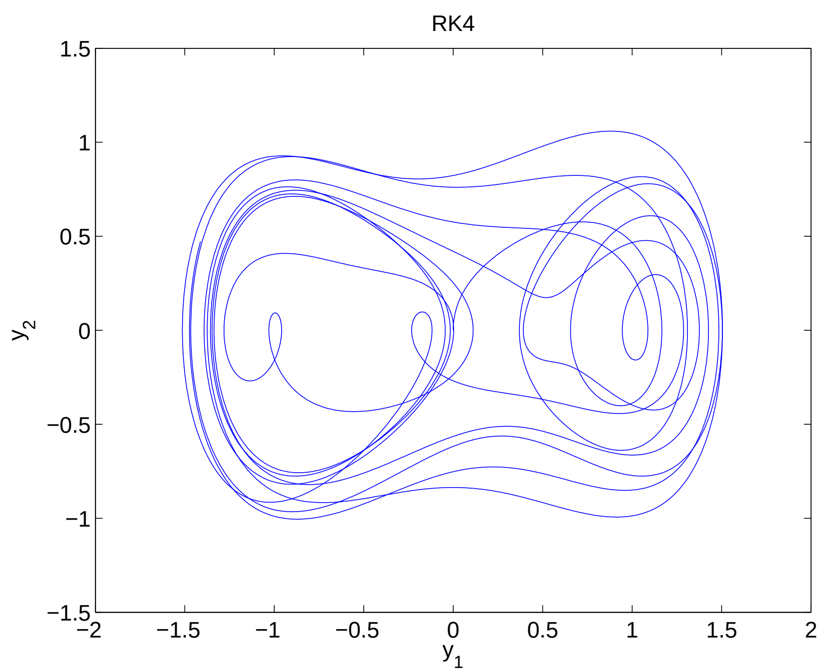
som med de gitte verdiene gir

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}0394 \end{pmatrix}.$$

For punktene **c)**, **d)** og **e)**, se vedlagte MATLAB-filer, og prøv selv.

Resultatet med forbedret Euler og RK4 er gitt i figurene under. Her har vi brukt parametrene fra oppgave **2b)** med $h = 0{,}01$ og integrert fra 0 til 100.


Improved Euler
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
y1
y2


RK4
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
y1
y2

Oppgave 3

a) De åtte ordensbetingelsene for fjerdeordens Runge–Kutta-metoder er:

$$\sum_i b_i = 1 \tag{1}$$

$$\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \tag{3}$$

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \tag{4}$$

$$\sum_i b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \tag{5}$$

$$\sum_{i,j} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \tag{6}$$

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \tag{7}$$

$$\sum_{i,j,k} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \tag{8}$$

For å kontrollere at den gitte metoden oppfyller ordensbetingelsene behøver vi nå bare å sette inn verdiene fra Butcher-tabellen. For eksempel får vi for (7)

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 &= b_3 a_{32} c_2^2 + b_4(a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

b) Vi ønsker å finne et sett med vekter $\hat{b}_i$ slik at betingelsene (1)–(4) er tilfredsstilte. Det betyr at

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 &= 1, \\ \frac{1}{2}\hat{b}_2 + \frac{1}{2}\hat{b}_3 + \hat{b}_4 &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}\hat{b}_2 + \frac{1}{4}\hat{b}_3 + \hat{b}_4 &= \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4}\hat{b}_3 + \frac{1}{2}\hat{b}_4 &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Dette systemet har en entydig løsning, nemlig vektene i den opprinnelige Kuttas metode, $\hat{b}_1 = \hat{b}_4 = \frac{1}{6}$ og $\hat{b}_2 = \hat{b}_3 = \frac{1}{3}$. Derfor kan ikke denne løsningen brukes til sammenligning.

Oppgave 4

a) Ligningen $y' = y$, $y(0)$ har løsningen $y(t) = \mathrm{e}^t y_0$. Løsningen etter et skritt vil være

$$y(h) = \mathrm{e}^h y_0 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right) y_0 = y_0 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{h^p}{p!}.$$

En eksplisitt metode med s nivåer blir for dette problemet

$$\begin{aligned}
k_1 &= y_0 \\
k_2 &= y_0 + ha_{21}k_1 = (1 + ha_{21})y_0 \\
k_3 &= y_0 + ha_{31}k_1 + ha_{32}k_2 = \big(1 + h(a_{31} + a_{32}) + h^2 a_{32}a_{21}\big)y_0 \\
&\ \ \vdots \\
k_s &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}k_j \\
y_1 &= y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i.
\end{aligned}$$

Vi ser at k_i er et polynom av grad $i-1$ i h. Det betyr at y_1 er et polynom av grad s. Metoden kan altså maksimalt være av orden s.

Kommentar: Det fins eksplisitte Runge–Kutta-metoder av orden s for $s \leq 4$. Men for å finne en slik metode av orden 5, trengs $s \geq 6$.

b) Vi setter opp de 4 gjeldende ordensbetingelsene for metoder av orden 3 med 3 nivåer:

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + b_3 &= 1, \\
b_2c_2 + b_3c_3 &= \frac{1}{2}, \\
b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= \frac{1}{3}, \\
b_3a_{32}c_2 &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Dette systemet er lineært for b_1, b_2, b_3. Vi kan se bort fra den første ligningen og b_1, og sette opp et system for b_2, b_3:

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ c_2^2 & c_3^2 \\ 0 & a_{32}c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

For at systemet skal ha en løsning må høyresiden være med i kolonnerommet til matrisen, dette innebærer at 3×3-matrisen vi får ved å legge til høyresiden som en tredje kolonne må være singulær, dvs. med 0-determinant. Kravet blir derfor

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & 1/2 \\ c_2^2 & c_3^2 & 1/3 \\ 0 & a_{32}c_2 & 1/6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_2(3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2) = 0.$$

Nå er ikke $c_2 = 0$ mulig fordi den første kolonnen da blir eksakt null og den andre blir ikke proporsjonal med den tredje. Vi kan også se dette fra at den siste ordensbetingelsen blir umulig å oppfylle. Vi konkluderer derfor med at et nødvendig og tilstrekkelig krav er

$$3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2 = 0.$$

c) Vi kan sette inn $a_{32} = c_3$ i relasjonen ovenfor og får da kravet

$$c_3\big(c_3 - 3c_2(1 - c_2)\big) = 0.$$

Vi kan ikke ha $c_3 = 0$ fordi da blir $a_{32} = 0$ og den siste ordensbetingelsen kan ikke oppfylles. Istedet må vi kreve

$$c_3 = 3c_2(1 - c_2).$$

Vi merker oss at alle verdier for c_2 bortsett fra $c_2 = 0, c_2 = 1$ er tillatt. For alle øvrige verdier av c_2 karakteriseres metoden forøvrig som følger uttrykt ved den frie parameteren c_2:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{c_2^3 - 3c_2^2/2 + 2c_2/3 - 1/9}{c_2^2(c_2 - 1)}, \\ b_2 &= \frac{c_2/2 - 1/6}{c_2^2}, \\ b_3 &= \frac{1}{18c_2^2(1 - c_2)}. \end{aligned}$$

d) En finner feilestimeringsmetode ved å kreve

$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 = 1, \quad \hat{b}_2c_2 = \frac{1}{2}.$$

Merk kravet fra tidligere om at $c_2 \notin \{0, 1\}$. Dermed kan vi sette

$$\hat{b}_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}, \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{2c_2},$$

så dette blir også en familie med parameteren c_2 fra forrige punkt.

Oppgave 5

a) Egenverdiene er $\lambda_{1,2} = -10 \pm 20\mathrm{i}$.

b) Stabilitetsfunksjonen er gitt ved

$$R(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

For at den numeriske løsningen skal være stabil må

$$|R(h\lambda)| \leq 1$$

for alle egenverdiene av M. I vårt tilfelle betyr det at

$$\begin{aligned} \big|R\big((-10 + 20\mathrm{i})h\big)\big|^2 &= R\big((-10 + 20\mathrm{i})h\big) \cdot R\big((-10 - 20\mathrm{i})h\big) \\ &= 1 - 20h + 200h^2 - 5000h^3 + 62500h^4 \leq 1, \end{aligned}$$

noe som er oppfylt for $0 \leq h \leq 0{,}08603$.

c) Se `ov07_5c.m`. Bruk f.eks. skrittlengdene 0,085, 0,086 og 0,087.

Oppgave 6

Du kan gjøre denne oppgaven selv. Resultatet vil kanskje overraske deg!