

TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2012

Øving 7

Oppgave 1

Gitt en ordinær differensialligning

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}. \quad (1)$$

Du kan anta at f tilfredsstiller Lipschitz-betingelsen

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

En *én-skrittmetode* for å løse denne differensialligningen kan beskrives ved

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N} \quad (2)$$

Anta følgende:

- Den lokale avbruddsfeilen gitt ved

$$d_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n); h)$$

tilfredsstiller

$$\|d_{n+1}\| \leq Dh^{p+1}$$

der D er en positiv konstant.

- Funksjonen Φ er Lipschitz-kontinuerlig, med Lipschitz-konstant M , dvs.

$$\|\Phi(t_n, y; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}; h)\| \leq M\|y - \tilde{y}\|. \quad (3)$$

- a) Vis at i så fall tilfredsstiller den globale feilen i t_{end}

$$\|e_N\| = \|y(t_{\text{end}}) - y_N\| \leq Ch^p,$$

der C er en positiv konstant som avhenger av M , D og intervallet $t_{\text{end}} - t_0$.

- b) Anta at en eksplisitt Runge–Kutta-metode i 2 nivåer, gitt ved Butcher-tablået

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & c_2 & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

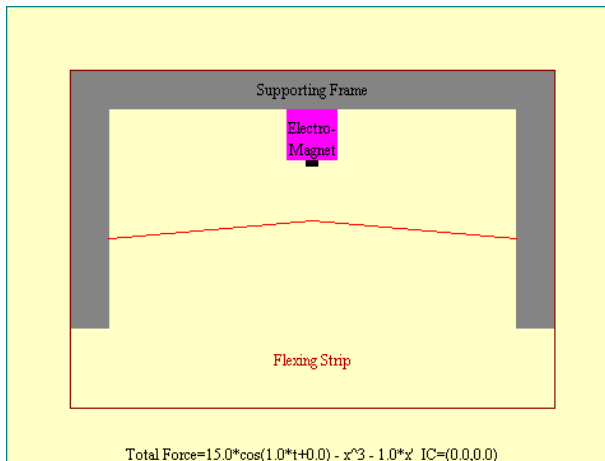
blir brukt til å løse (1). Vis at metoden kan skrives på formen (2). Anta nå at $h \leq h_{\text{max}}$ og vis at Φ oppfyller Lipschitz-betingelsen i y , med en Lipschitz-konstant M som avhenger av metodekoeffisientene c_2 , b_1 og b_2 , og av L og h_{max} .

Oppgave 2

En mye studert matematisk modell er Duffing-oscillatoren. Denne kan beskrives ved startverdiproblemet

$$u'' + ku' - u(1 - u^2) = A \cos(\omega t). \quad (4)$$

G. Duffing brukte i 1918 denne ligningen til å beskrive en tynn, bøyelig metallstav som svinger i nærheten av en elektromagnet. Konstanten k er dempingen, mens ω og A beskriver henholdsvis frekvens og amplitude til pådraget fra elektromagneten. Se <http://www.mcasco.com/pat1.html> for flere detaljer.



- Begynn med å skrive om (4) til et system av to førsteordens differensialligninger.
- Gjør en håndregning (dvs. kalkulator er lov) av ett skritt med forbedret Eulers metode (også kalt Heuns metode) der du setter $k = 0,25$, $A = 0,4$, $\omega = 1,0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, og bruk skritt lengde $h = 0,1$.
- Implementer forbedret Eulers metode i MATLAB og bruk den til å løse (4).
- Lag plott av første komponent u langs x -aksen og andre komponent u' langs y -aksen (dette kalles et *faseplott*). Begynn med de samme parametrene som i **b**), men varier etterhvert og se hva som skjer. I dette punktet kan du bruke $h = 0,01$. Forsøk å integrere over ganske lang tid.
- Forsøk å kjøre gjennom med mange forskjellige startverdier, og plott de resulterende integralkurver for å få et bilde av hvordan integralkurvene ser ut. Du kan bruke samme verdier som ovenfor for $k = 0,25$, $A = 0,4$, $\omega = 1,0$.
- Lag til slutt en implementasjon der du bytter ut forbedret Euler med RK4. Sammenlign resultatene.

Oppgave 3

Kuttas metode fra 1901 er den mest berømte av alle eksplisitte Runge–Kutta-par, gitt ved følgende Butcher-tabell:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- a) Verifiser at metoden har orden 4 ved å sjekke alle de 8 ordensbetingelsene.
- b) En besnærende tanke er nå å finne et nytt sett med vektor, si \hat{b}_s slik at den tilhørende metoden får orden 3, til bruk for feilestimering og skrittlengdekontroll. Forsøk å finne et slikt sett med \hat{b}_s .

Oppgave 4

- a) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med s nivåer maksimalt kan være av orden s . (Hint: Bruk $y' = y$, $y(0) = y_0$ som testligning.)
- b) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med 3 nivåer av orden 3 må oppfylle
$$3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2 = 0.$$
- c) Karakteriser alle eksplisitte Runge–Kutta-metoder med 3 nivåer av orden 3 som oppfyller $a_{31} = 0$, dvs. $a_{32} = c_3$. Hvor mange frie parametre fins?
- d) Bestem alle eksplisitte metoder av orden 2 som har samme koeffisienter a_{ij} som metoden ovenfor, og vektor som samtidig oppfyller $\hat{b}_3 = 0$.

Oppgave 5

a) Finn egenverdiene til matrisa

$$M = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 40 & -10 \end{pmatrix}.$$

b) Anta at du skal løse differensialligningen

$$y' = My, \quad y(0) = y_0$$

ved hjelp av forbedret Eulers metode. Hva er den største skrittlengden h_{\max} du kan bruke?

c) Løs ligningen

$$y' = My + g(t), \quad 0 \leq t \leq 10$$

med

$$g(t) = (\sin(t), \cos(t))^T, \quad y(0) = \left(\frac{5210}{249401}, \frac{20259}{249401} \right)^T$$

ved bruk av `impEuler.m`. Velg skrittlengder litt mindre enn og litt større enn h_{\max} . Hva observerer du?

Oppgave 6

Den lineære testligningen

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0$$

har løsningen $y(h) = e^z y_0$ der $z = \lambda h$. Et skritt med en Runge–Kutta-metode gir $y_1 = R(z)y_0$. Dermed kan vi betrakte stabilitetsfunksjonen $R(z)$ som en tilnærming til e^z . Vil $R(z)$ vokse (i absoluttverdi) raskere enn e^z ? Dette kan vi finne ut ved å studere når $|R(z)/e^z| > 1$.

Skriv om skriptet `stab.m` til å plote området

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)/e^z| > 1\}.$$

Beregn stabilitetsfunksjonen for noen av Runge–Kutta-metodene du kjenner og finn \mathcal{A} for disse. Du kan også tegne området for stabilitetsfunksjonene for Gauss–Legendre-metodene (kollokasjonsmetoder av orden $2s$). Disse er gitt ved:

$$\begin{aligned} s = 1, \quad R(z) &= \frac{1 + z/2}{1 - z/2}, \\ s = 2, \quad R(z) &= \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12}, \\ s = 3, \quad R(z) &= \frac{1 + z/2 + z^2/10 + z^3/120}{1 - z/2 + z^2/10 - z^3/120}. \end{aligned}$$

Området \mathcal{A} kalles en *ordensstjerne*.