Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

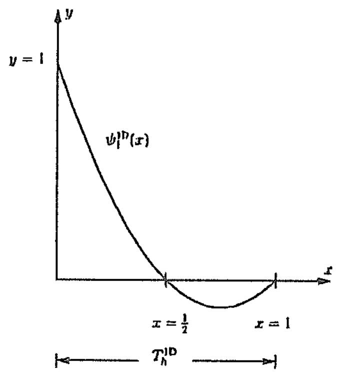
Faglig kontakt under eksamen:
Bjarte Hægland (73 59 35 47)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER MED ELEMENTMETODEN (TMA4220)

Lørdag 10. juni 2006
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 3. juli 2006

Hjelpemidler:
Godkjent lommekalkulator tillatt.
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt.

Oppgave 1 Figur 1 viser et kvadratisk element med utstrekning $\Omega_{T_h^{1D}} = (0, 1)$. Elementet

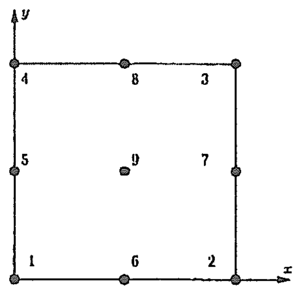


Figur 1: 1 dimensjonalt kvadratisk element.

har 3 lokale noder, nummerert fra venstre til høyre i figuren. Basisfunksjonen ψ_1^{1D} for lokal node 1 er vist i figuren og er gitt ved

$$\psi_1^{1D}(x) = 2\Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x - 1\Big).$$

a) Kopier figuren over til din besvarelse og tegn opp de tilhørende basisfunksjonene for lokale noder 2 og 3. Skriv også basisfunksjonene for lokal node 2 og 3 som funksjoner av x.



Figur 2: 2 dimensjonalt kvadratisk element.

Figur 2 viser området $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ diskretisert med ett kvadratisk element. Elementet har 9 lokale noder nummerert som vist på figuren.

b) Skriv opp de 9 kvadratiske basisfunksjonene som funksjoner av x og y.
Hint: Bruk basisfunksjonene for det 1-dimensjonale elementet i oppgave a).

Vi skal nå betrakte Poissonproblemet

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= 1 \qquad \text{i} \qquad \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u &= 0 \qquad \text{på} \qquad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

c) Utled en svak formulering av problemet på formen:
Finn $u \in X$ slik at

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in X.$$

Bestem funksjonsrommet X og formene $a(\cdot,\cdot)$ og $l(\cdot)$.

Vi diskretiserer Poissonproblemet (1) fra oppgave **c)** med ett kvadratisk element som vist i figur 2. Vi uttrykker løsningen u_h ved hjelp av basisfunksjonene og setter inn i den svake formuleringen fra oppgave **c)** og tar hensyn til randbetingelsene. Dette gir ligningssystemet

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{F}_h, \tag{2}$$

der $(A_h)_{i,j} = a(\psi_j, \psi_i)$ og $(\mathbf{F}_h)_i = l(\psi_i)$.

d) Hvor mange frihetsgrader har det lineære systemet?

Deler av den lokale stivhetsmatrisen for det kvadratiske 9-noders elementet i oppgave **b)** er gitt under

$$A_h^{T_h^{2D}} = \begin{bmatrix} X & \frac{-1}{30} & \frac{-1}{45} & \frac{-1}{30} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-16}{45} \\ \frac{-1}{30} & \frac{28}{45} & \frac{-1}{30} & \frac{-1}{45} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{-16}{45} \\ \frac{-1}{45} & \frac{-1}{30} & \frac{28}{45} & \frac{-1}{30} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-16}{45} \\ \frac{-1}{30} & \frac{-1}{45} & \frac{-1}{30} & \frac{28}{45} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{5} & \frac{-16}{45} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{9} & X & \frac{-1}{5} & \frac{88}{45} & \frac{-16}{45} & 0 & \frac{-16}{45} & \frac{-16}{15} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-16}{45} & \frac{88}{45} & \frac{-16}{45} & 0 & \frac{-16}{15} \\ \frac{1}{9} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{-16}{45} & \frac{88}{45} & \frac{-16}{45} & \frac{-16}{15} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-16}{45} & 0 & \frac{-16}{45} & \frac{88}{45} & \frac{-16}{15} \\ \frac{-16}{45} & \frac{-16}{45} & \frac{-16}{45} & \frac{-16}{45} & \frac{-16}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{256}{45} \end{bmatrix}$$

e) Elementene $(A_h^{T_h^{2D}})_{1,1}$ og $(A_h^{T_h^{2D}})_{5,3}$ mangler. Bestem disse.

Den lokale lastvektoren for det kvadratiske elementet er

$$\mathbf{F}_h = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

f) Løs det lineære systemet (2) og skriv opp den numeriske løsningen $u_h(x, y)$.

Oppgave 2 Vi skal se på differensialligningen

$$\begin{aligned} -u_{xx} + u_x + u &= f \qquad \text{i} \qquad x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

a) Finn den svake formuleringen

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X.$$

Identifiser spesielt den bilineære formen $a(\cdot,\cdot)$, den lineære formen $l(\cdot)$ og funksjonsrommet X.

b) Vis at

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_X \|v\|_X,$$

og bestem konstanten C.

c) Vis at

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2,$$

og bestem konstanten α.

Oppgave 3 Betrakt det tidsavhengige konveksjonsproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \qquad \text{i} \qquad \Omega = (0,1) \\ u(0,t) &= u(1,t) \\ u(x,0) &= u^0(x) \end{aligned}$$

På svak form er problemet:
Finn $u \in Y(X)$ slik at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v) + c(u,v) = 0 \qquad \forall v \in X, \tag{4}$$

Hvor

$$\begin{aligned} \forall w, v \in X, \quad c(w,v) &= \int_0^1 U w_x v \,\mathrm{d}x \\ \forall w, v \in X, \quad (w,v) &= \int_0^1 wv \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

og funksjonsrommene er definert ved

$$\begin{aligned} X &= H^1_{\#}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = v(1)\} \\ Y(X) &= \{v \mid \forall t \in [0,T],\ v(x,t) \in X,\ \int_0^T \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t < \infty\} \end{aligned}$$

a) Anta at vi vil bruke elementmetoden til å diskretisere (4) i rom. Anta videre at vi bruker et uniformt grid med K lineære elementer. Formuler den diskrete versjonen av (4). Hva er dimensjonen til det diskrete funksjonsrommet X_h?

b) Fra nå av skal vi bruke $K = 4$ lineære elementer. Skisser basisfunksjonene og skriv opp lokal-til-global avbildning av nodene.

Bruk av K lineære elementer gir i et system av ordinære differensialligninger på formen:

$$M_h \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_h}{\mathrm{d}t} + C_h \mathbf{u}_h = 0 \tag{5}$$

der M_h er massematrisa og C_h er den diskrete konveksjonsoperatoren.

c) Assembler den globale diskrete konveksjonsoperatoren C_h for $K = 4$ lineære elementer. Den lokale elementmatrisen for hvert element er:

$$C^k = \frac{U}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Hva er numerisk dispersjon og hva er årsaken til numerisk dispersjon?