Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Einar M. Rønquist (73593547)

EKSAMEN I FAG SIF5050
NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER VED HJELP AV ELEMENTMETODEN

Onsdag 29. mai 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:	Godkjent lommekalkulator tillatt.
	Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Sensur:	Sensuren vil foreligge i uke 27.

Oppgave 1

Betrakt problemet:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)\frac{du}{dx}\right) &= 0 \quad i \quad \Omega=(0,1) && (1)\\ u(0) &= 0 && (2)\\ u_x(1) &= 1\ . && (3)\end{aligned}$$

Dette problemet tilsvarer stasjonær varmeledning i et materiale som har en varierende varmeledingsevne $\kappa(x)=\frac{1+x}{2}$, og der det ikke er noe kildeledd ($f=0$).

a) Finn den eksakte løsningen $u(x)$ av problemet (1)-(3). Hva er u(1)?

Fasit: Integrasjon av (1) gir:

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)\frac{du}{dx}=C_1$$

der C_1 er en integrasjonskonstant. Grensebetingelsen $u_x(1)=1$ gir $C_1=1$. Vi finner derfor at

$$\frac{du}{dx}=\frac{2}{1+x}\ ,$$

noe som medfører at

$$u(x)=2\,ln(1+x)+C_2$$

der C_2 er en integrasjonskonstant. Grensebetingelsen $u(0) = 0$ gir $C_2 = 0$. Dette gir

$$u(x) = 2\,ln(1 + x)$$

og $u(1) = 2\,ln(2)$.

b) Utled en svak formulering av problemet (1)-(3) på formen: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{4}$$

Identifiser spesielt X, a og l for dette problemet. Hint: multipliser (1) med en testfunksjon $v(x)$, integrer over Ω, foreta delvis integrasjon, og bruk grensebetingelsene.

Fasit: Vi multipliserer (1) med en testfunksjon v og integrerer over Ω:

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx}\left((\frac{1+x}{2}) \frac{du}{dx} \right) v(x)\ dx = 0$$

Delvis integrasjon gir så:

$$\left[-(\frac{1+x}{2}) \frac{du}{dx}\ v(x) \right]_0^1 + \int_0^1 (\frac{1+x}{2}) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\ dx = 0$$

Innsetting av grensebetingelsene $u_x(1) = 1$ og $v(0) = u(0) = 0$ gir:

$$-v(1) + \int_0^1 (\frac{1+x}{2}) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\ dx = 0$$

Den svake formuleringa kan derfor skrives på formen: Finn $u(x) \in X$ slik at

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X$$

der

$$\begin{aligned} X &= \{\ v \in H^1(\Omega)\ \mid\ v(0) = 0\ \} \\ a(w, v) &= \int_0^1 (\frac{1+x}{2}) \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx}\ dx \\ l(v) &= v(1)\ . \end{aligned}$$

c) Er den bilineære formen a symmetrisk? Vis at, for alle funksjoner $w \in X$, $w \neq 0$,

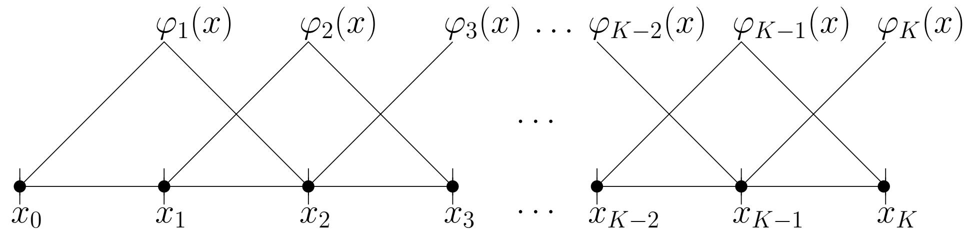
$$a(w, w)\ \geq\ \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2\, dx\ >\ 0.$$

Fasit: Ja, a er symmetrisk siden $a(w, v) = a(v, w)$ for alle $v, w \in X$. Videre er

$$a(w, w) = \int_0^1 (\frac{1+x}{2}) \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dx}\ dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2\, dx$$

Siden $w \in X$, er $a(w, w) > 0$ for alle $w \neq 0$.

d) Finnes det en minimaliseringsformulering svarende til (4)? I så fall, beskriv denne.



Figur 1: Basisfunksjoner ved bruk av K lineære elementer.

Fasit: Ja, siden $a(\cdot,\cdot)$ er symmetrisk og positiv definitt (SPD), finnes det en tilhørende minimaliseringsformulering. Denne er gitt som

$$u = \min_{w \in X} J(w)$$

der $J(w)$ er den kvadratiske funksjonalen

$$J(w) = \frac{1}{2} a(w,w) - l(w) \quad .$$

e) Anta at vi vil bruke elementmetoden til å løse (4) numerisk. Anta videre at vi bruker et uniformt grid med K lineære elementer. Formuler det diskrete problemet.
Hva er dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h?
Skisser basisfunksjonene til X_h.

Fasit: Vi definerer det diskrete underrommet $X_h \subset X$ som består av alle funksjoner som er lineære over hvert element T_h^k, $k = 1, ..., K$, kontinuerlige over Ω, og som tilfredstiller den essensielle, homogene grensebetingelsen i $x = 0$. Matematisk kan vi uttrykke dette som

$$X_h = \{ v \in X \quad | \quad v_{|T_h^k} \in \mathbb{P}_1(T_h^k),\, k = 1, ..., K \}$$

Det diskrete problemet kan da skrives som: Finn $u_h \in X_h \subset X$ slik at

$$a(u_h, v) = l(v) \qquad\qquad \forall v \in X_h$$

Dette gir en konform metode (Galerkin).

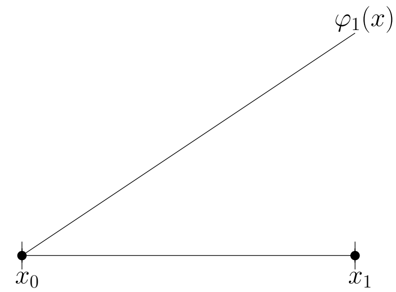
Dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h er K.

Basisfunksjonene er skissert i Figur 1.

f) Er den diskrete løsningen $u_h(x)$ kontinuerlig over Ω for $K > 1$?
Er den deriverte av $u_h(x)$ kontinuerlig over Ω for $K > 1$?

Fasit: Den diskrete løsningen er kontinuerlig over Ω ($u_h \in X_h \subset X$). Den deriverte av u_h er generelt sett ikke kontinuerlig over Ω ($K > 1$).

g) Vis at den diskrete løsningen u_h er entydig.



Figur 2: Basisfunksjoner ved bruk av $K = 1$ lineært element.

Fasit: Anta at det eksisterer to løsninger u_h^1 og u_h^2. Da har vi at

$$\begin{aligned} a(u_h^1, v) &= l(v) \qquad \forall v \in X_h \ , \\ a(u_h^2, v) &= l(v) \qquad \forall v \in X_h \ . \end{aligned}$$

Subtraksjon gir

$$a(u_h^1 - u_h^2, v) = 0 \qquad \forall v \in X_h \ .$$

Velger vi $v = u_h^1 - u_h^2 \in X_h$ får vi at

$$a(u_h^1 - u_h^2, u_h^1 - u_h^2) = 0 \ .$$

Siden $a(\cdot,\cdot)$ er symmetrisk og positiv definitt, kan dette siste resultatet bare være oppfyllt for $u_h^1 - u_h^2 = 0$, dvs. $u_h^1 = u_h^2$. Løsningen er altså entydig.

h) Ved å velge en nodal basis for det diskrete løsningsrommet X_h, ender vi opp med et lineært ligningssystem $\underline{A}_h \, \underline{u}_h = \underline{F}_h$ som vi må løse for de ukjente basiskoeffisientene $\underline{u}_h$. Anta at du har valget mellom å bruke konjugerte gradienters metode og en tridiagonal ligningsløser basert på LU-faktorisering. Hvilken metode vil du anbefale for dette en-dimenjonale, stasjonære varmeledningsproblemet?

Fasit: Jeg vil anbefale den tridiagonale ligningsløseren. Konjugerte gradienters metode er generelt bare attraktiv for multidimensjonale varmeledningsproblem.

i) Anta at vi bare bruker *ett* lineært element over Ω, dvs, $K = 1$.
Hva er dimensjonen til det diskrete rommet $X_h \subset X$ i dette tilfellet?
Skisser alle basisfunksjonene til X_h.

Fasit: Alle lineære funksjoner over ett enkelt element kan generelt beskrives ved hjelp av to basisfunskjoner. I vårt tilfelle må funskjonene også tilfredstille den essensielle grensebetingelsen i $x = 0$. Dimensjonen til X_h er derfor lik 1. Vi setter $X_h = span\{\ \phi_1\ \}$ der basisfunsjonen $\phi_1 = x$ er skissert i Figur 2.

j) Finn eksplisitt den diskrete løsningen $u_h(x)$ med ett lineært element.
Bruk eksakt integrasjon ved utregning av den bilinære og den lineære formen.
Hva er $u_h(1)$? Hvor stor er feilen $u(1) - u_h(1)$?

Fasit: Siden $u_h \in X_h$ kan vi skrive $u_h(x)$ som $u_h(x) = u_{h1}\,\phi_1(x)$ der u_{h1} er den ukjente basiskoeffisienten og $\phi_1(x) = x$. Det diskrete problemet gir oss i dette tilfellet en ligning med en ukjent, nemlig

$$\int_0^1 (\frac{1+x}{2})\ u_{h1} \frac{d\phi_1}{dx}\ \frac{d\phi_1}{dx}\ dx = \phi_1(1)$$

Siden $\phi_1 = x$ er $\frac{d\phi_1}{dx} = 1$ og $\phi_1(1) = 1$. Vi får derfor

$$u_{h1} \int_0^1 (\frac{1+x}{2})\ dx = 1$$

eller

$$u_{h1}\ \frac{3}{4} = 1\ ,$$

noe som gir $u_{h1} = 4/3$. Den eksakte numeriske løsningen med ett lineært element er dermed gitt som $u_h(x) = \frac{4}{3}\,x$. Dette gir $u_h(1) = 4/3$, og feilen $u(1) - u_h(1) = 2\,ln(2)\ -\ 4/3 \approx 1.386 - 1.333 = 0.053$, en feil på ca 4%.

k) Tilfredstiller $u_h(x)$ den naturlige grensebetingelsen i punktet $x = 1$ eksakt?

Fasit: Nei, $\frac{du_h}{dx} = 4/3$, dvs, $\frac{du_h}{dx}(1) = 4/3$, mens $\frac{du}{dx}(1) = 1$. Siden elementmetoden er basert på den svake formuleringen, er generelt sett de naturlige grensebetingelsene ikke tilfredstillt eksakt.

Oppgave 2

Betrakt konveksjons-diffusjons-problemet:

$$\begin{aligned} -\kappa\, u_{xx} + U\, u_x &= f \quad i \quad \Omega = (0,1)\ , && (5)\\ u(0) &= 0\ , && (6)\\ u(1) &= 1\ , && (7) \end{aligned}$$

der κ er en konstant diffusjonskoeffisient og U er en konstant konveksjonshastighet.

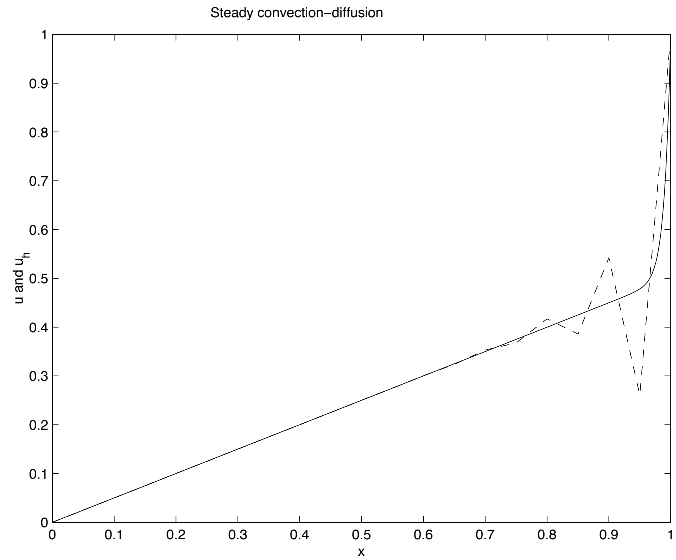
Vi er spesielt interessert i å løse dette problemet numerisk med elementmetoden i det tilfellet der $\kappa = 0.01$, $U = 1$ og $f = 0.5$. Figur 1 sammenligner den eksakte og den diskrete løsningen ved bruk av $K = 20$ like elementer.

a) Hva er grid Peclet tallet assosiert med elementløsningen i Figur 1?

Fasit: Grid Peclet tallet er gitt som $P_g = hU/\kappa$. Her er $h = 1/K = 1/20 = 0.05$, $U = 1$, $\kappa = 0.01$, noe som gir $P_g = 5$.

b) Hvor mange elementer må vi bruke for å unngå oscillasjoner hvis vi insisterer på å bruke et uniformt grid?

Fasit: Grid Peclet tallet P_g må være mindre enn 2. Det betyr at $P_g = hU/\kappa < 2$. Med de gitte verdier gir dette kravet $h < 0.02$. Vi må ha minst $K = 1/0.02 = 50$ elementer.



Figur 3: En sammenligning mellom den eksakte løsningen u (heltrukken linje) og den standard elementløsningen u_h (stiplet linje) i det tilfellet at vi bruker et uniformt grid med $K = 20$ lineære elementer.

c) Kan vi forbedre den numeriske løsningen basert på lineære elementer (see Figur 1) uten å øke antall frihetsgrader, dvs, uten å øke antall elementer?

Fasit: En måte å unngå oscillasjoner er å bruke en oppstrøsmetode. I elementsammenheng tilsvarer dette å adderere numerisk diffusjon i strømretningen slik at grid Peclet tallet aldri blir større enn 2. Ulempen med denne metoden er at løsningen vil bli unøyaktig i og i nærheten av grenseskiktet som vi har ved $x = 1$.

Vi kan også forbedre løsningen ved å bruke en ikke-uniform elementoppdeling slik at vi har flere elementer i grenseskiktet. For eksempel vil en cosinus-fordeling av nodepunktene gi en mye bedre løsning for det samme antall frihetsgrader.

Oppgave 3

Betrakt det tidsavhengige konveksjonsproblemet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad i \quad \Omega = (0, L) \\ \\ u(0,t) &= u(L,t) \\ u(x,t=0) &= u^0(x) \ . \end{aligned}$$

Hvis vi bruker K lineære elementer, ender vi opp med et system av ordinære differensial-ligninger på formen

$$\underline{M}_h \frac{d\underline{u}_h}{dt} + \underline{C}_h \, \underline{u}_h = \underline{0} \tag{8}$$

der $\underline{M}_h$ er massematrisa, og $\underline{C}_h$ er den diskrete konveksjonsoperatoren.

a) Vis at massematrisa $\underline{M}_h$ er symmetrisk og positiv definitt.

Fasit: Først uttrykker vi det diskrete løsningsrommet X_h som $X_h = span\{\phi_1, ..., \phi_N\}$ med $N = K$. Vi har da at

$$(M_h)_{ij} = \int_0^L \phi_i \, \phi_j \; dx = \int_0^L \phi_j \, \phi_i \; dx = (M_h)_{ji} \ ,$$

dvs, $\underline{M}_h$ er symmetrisk.

Videre har vi at, for alle $\underline{v} \in I\!R^N$, with $\underline{v}^T = [v_1, v_2, ..., v_N]$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, og $v(x) = \sum_{i=1}^N v_i \, \phi_i(x) \in X_h$:

$$\begin{aligned}
\underline{v}^T \, \underline{M}_h \, \underline{v} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v_i \, (M_h)_{ij} \, v_j = \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v_i (\int_0^L \phi_i \, \phi_j \; dx) \, v_j \\
&= \int_0^L (\sum_{i=1}^N v_i \phi_i) \, (\sum_{j=1}^N v_j \phi_j) \; dx \\
&= \int_0^L v(x) \, v(x) \; dx = \int_0^L v^2(x) \, dx \ > \ 0 \ .
\end{aligned}$$

Vi har dermed også vist at massematrisa er positiv definitt.

b) Vis at matrisa $\underline{C}_h$ er skeiv-symmetrisk (eller anti-symmetrisk) for de gitte periodiske grensebetingelsene.

Fasit: Vi må vise at $(C_h)_{ij} = -(C_h)_{ji}$. Som i a) uttrykker vi det diskrete løsningsrommet X_h som $X_h = span\{\phi_1, ..., \phi_N\}$ med $N = K$. Merk at alle basisfunskjonene tilfredstiller de periodiske grensebetingelsene. Vi har da at

$$\begin{aligned}
(C_h)_{ij} &= \int_0^L U \, \frac{d\phi_j}{dx} \, \phi_i \, dx \\
&= [\, U \phi_j \, \phi_i \,]_0^L \ - \int_0^L U \, \phi_j \, \frac{d\phi_i}{dx} \, dx \\
&= - \int_0^L U \, \phi_j \, \frac{d\phi_i}{dx} \, dx \\
&= -(C_h)_{ji} \ .
\end{aligned}$$

Konveksjonsmatrisa er derfor skeiv-symmetrisk. I utledningen ovenfor har vi brukt delvis integrasjon og de periodiske grensebetingelsene.

c) Vil du anbefale å bruke forlengs Euler som tidsintegrasjonsmetode for (8)?

Fasit: Nei! Hvis vi ønsker å bruke en eksplisitt metode, må det tilhørende stabilitetsområdet inkludere deler av den imaginære aksen. Dette fordi egenverdiene til $\underline{M}_h^{-1} \underline{C}_h$ er rent imaginære. Forlengs Euler omslutter ikke deler av den imaginære aksen, og vil derfor være ustabil selv om tidssteget $\Delta t \to 0$.

d) Anta at vi har en tidsintegrasjonsmetode som kan integrere (8) eksakt, og at vi bruker denne metoden til å integrere (8) fra $t = 0$ til tida $t = T > 0$.
Vil vi ha numerisk dispersjon i dette tilfellet?

Fasit: Ja, vi vil ha numerisk dispersjon. Grunnen til dette er at numerisk dispersjon har sitt opphav i den romlige diskretiseringa.

Lykke til!

Einar M. Rønquist