Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Einar M. Rønquist (73593547)

EKSAMEN I FAG TMA4220
NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER VED HJELP AV ELEMENTMETODEN

Torsdag 13. mai 2004
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:	Godkjent lommekalkulator tillatt.
	Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Sensur:	Sensuren vil foreligge i uke 23.

Oppgave 1 Betrakt den endimensjonale Poisson-ligningen

$$-u_{xx} = 2 \quad \text{i} \quad \Omega = (0,1) \tag{1}$$

med grensebetingelsene

$$u_x(0) = 1 \tag{2}$$
$$u(1) = 0 \; . \tag{3}$$

Her begner u_x den deriverte av u med hensyn på x.

a) Finn den eksakte løsningen $u(x)$ av problemet (1)-(3). Hva er $u(0)$? Skisser løsningen.

b) Utled en svak formulering av problemet (1)-(3) på forma: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{4}$$

Identifiser spesielt X, a og l for dette problemet.

c) Er den bilineære formen a symmetrisk? Er den positiv definitt?

d) Finnes det en minimaliseringsformulering svarende til (4)? I så fall, beskriv denne.

e) Anta at vi velger elementmetoden for å løse (4) numerisk.
Anta videre at vi bruker et uniformt grid med bare $K = 2$ lineære elementer.
Formuler det diskrete problemet.
Hva er dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h?
Anta at vi bruker en standard, nodal basis. Skisser basisfunksjonene til X_h.

f) Generer det algebraiske ligningssystemet for de ukjente basiskoeffisientene.
Du kan velge selv om du vil bruke ett-punkts Gauss-kvadratur eller "integrasjon ved interpolasjon" for å beregne høyresiden.
Finn alle basiskoeffisientene.

g) Sammenlign den numeriske løsningen $u_h(x)$ med den eksakte løsningen $u(x)$.
Hva er feilen $e(x) = u(x) - u_h(x)$ i nodepunktene?

h) Tilfredstiller den diskrete løsningen $u_h(x)$ grensebetingelsene eksakt?

i) Betrakt på nytt Poisson-ligningen (1), men nå med grensebetingelsene

$$u_x(0) = 1 \tag{5}$$
$$-u_x(1) = u(1)\ . \tag{6}$$

Utled en svak formulering av det nye problemet (tilsvarende punkt b)).

j) Vi velger elementmetoden for å løse det nye Poisson-problemet.
Vi bruker $K = 2$ lineære elementer som tidligere.
Formuler det diskrete problemet.
Hva er dimensjonen på det diskrete løsningsrommet X_h? Skisser basisfunksjonene.

k) Er den diskrete løsningen entydig?

Oppgave 2

Betrakt konveksjons-diffusjons-problemet:

$$
\begin{aligned}
-\kappa\, u_{xx} + U\, u_x &= f \quad \text{i} \quad \Omega = (0,1)\ , && (7)\\
u(0) &= 0\ , && (8)\\
u(1) &= 0\ , && (9)
\end{aligned}
$$

der κ er en konstant, positiv diffusjonskoeffisient og U er en konstant konveksjonshastighet.

a) Utled en svak formulering av problemet (7)-(9) på formen: Finn $u \in X$ slik at

$$b(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X$$

Identifiser spesielt X, b og l for dette problemet.

b) Er den bilineære formen b symmetrisk? Er den positiv definitt?

c) Vi er spesielt interessert i å løse dette problemet numerisk med elementmetoden i det tilfellet der $\kappa = 0.01$, $U = 2$ og $f = 1$. Anta at vi bruker et uniformt grid med $K = 200$ lineære elementer. Vil dette være tilstrekkelig god oppløsning til at vi unngår oscillasjoner i den diskrete løsningen?

d) Anta at vi velger en standard, nodal basis. Det algebraiske ligningssystemet for de ukjente nodeverdiene kan da skrives på formen

$$\underline{B}_h \underline{u}_h = \underline{F}_h. \qquad (10)$$

Hva er $\underline{B}_h$ for problemet betraktet i punkt c)?
Hint: konstruer først elementmatrisa for dette problemet basert på de gitte data.

e) Vil du anbefale å løse (10) ved hjelp av konjugerte gradienters metode?

Oppgave 3

Betrakt den tidsavhengige konveksjonsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} \quad = \quad 0 \quad \text{i} \quad \Omega = (0, L)$$

med den periodiske grensebetingelsen

$$u(0, t) \quad = \quad u(L, t)$$

og initialbetingelsen

$$u(x, t = 0) \quad = \quad u^0(x) \ .$$

Hvis vi approksimerer dette problemet i rom ved bruk av K lineære elementer, ender vi opp med et system av ordinære differensialligninger på formen

$$\underline{M}_h \frac{d\underline{u}_h}{dt} + \underline{C}_h \, \underline{u}_h \; = \; \underline{0} \ , \tag{11}$$

der $\underline{M}_h$ er massematrisa og $\underline{C}_h$ er den diskrete konveksjonsoperatoren.

Anta videre at vi diskretiserer (11) i tid ved hjelp av en tredje ordens Adams-Bashforth metode. Vi velger et konstant tidssteg Δt slik at Courant tallet $C = 0.2$.

a) La T være tida det tar for initialbetingelsen å forplante seg en gang gjennom Ω.
Vi sier også at løsningen er periodisk med periode T.
Hvor mange tidssteg trengs det for å integrere systemet (11) fremover i tid tilsvarende en hel periode T? Du kan anta at $K = 200$ og $U = 1$.

b) Vil den numeriske løsningen etter en periode T være lik initialbetingelsen?

Lykke til!

Einar M. Rønquist