Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Einar M. Rønquist (73593547)

EKSAMEN I FAG TMA4220
NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER VED HJELP AV ELEMENTMETODEN

Torsdag 13. mai 2004
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:	Godkjent lommekalkulator tillatt.
	Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Sensur:	Sensuren vil foreligge i uke 23.

Oppgave 1 Betrakt den endimensjonale Poisson-ligningen

$$-u_{xx} \quad = \quad 2 \quad \text{i} \quad \Omega = (0,1) \tag{1}$$

med grensebetingelsene

$$u_x(0) \quad = \quad 1 \tag{2}$$
$$u(1) \quad = \quad 0\ . \tag{3}$$

Her begner u_x den deriverte av u med hensyn på x.

a) Finn den eksakte løsningen $u(x)$ av problemet (1)-(3). Hva er $u(0)$? Skisser løsningen.

Fasit: Vi integrerer 2 ganger og bruker grensebetingelsene. Vi finner da at den eksakte løsningen er gitt som $u(x) = x(1-x)$. Løsningen er skissert nedenfor

b) Utled en svak formulering av problemet (1)-(3) på forma: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{4}$$

Identifiser spesielt X, a og l for dette problemet.

Fasit: Vi multipliserer (1) med en testfunksjon v og integrerer over Ω:

$$-\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\, v(x)\, dx = \int_0^1 2\, v(x)\, dx$$

Delvis integrasjon gir så:

$$[\,-\frac{du}{dx}(x)\; v(x)\,]_0^1 \;+\; \int_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^1 2\, v(x)\, dx$$

Innsetting av grensebetingelsene $u_x(0) = 1$ og $v(1) = u(1) = 0$ gir:

$$v(0) \;+\; \int_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^1 2\, v(x)\, dx$$

Den svake formuleringa kan derfor skrives på formen: Finn $u(x) \in X$ slik at

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X$$

der

$$\begin{aligned} X &= \{\; v \in H^1(\Omega) \;\;|\;\; v(1) = 0 \;\} \\ a(w, v) &= \int_0^1 \frac{dw}{dx}\,\frac{dv}{dx}\, dx \\ l(v) &= \int_0^1 2\, v(x)\, dx \;-\; v(0)\;\;. \end{aligned}$$

c) Er den bilineære formen a symmetrisk? Er den positiv definitt?

Fasit: Ja, a er symmetrisk siden $a(w, v) = a(v, w)$ for alle $v, w \in X$. Videre er

$$a(w, w) = \int_0^1 \frac{dw}{dx}\,\frac{dw}{dx}\, dx \;=\; \int_0^1 w_x^2\, dx$$

Siden $w \in X$, er $a(w, w) > 0$ for alle $w \neq 0$.

d) Finnes det en minimaliseringsformulering svarende til (4)? I så fall, beskriv denne.

Fasit: Ja, siden $a(\cdot, \cdot)$ er symmetrisk og positiv definitt (SPD), finnes det en tilhørende minimaliseringsformulering. Denne er gitt som

$$u = \min_{w \in X} J(w)$$

der $J(w)$ er den kvadratiske funksjonalen

$$J(w) = \frac{1}{2} a(w, w) - l(w)\;\;.$$

e) Anta at vi velger elementmetoden for å løse (4) numerisk.
Anta videre at vi bruker et uniformt grid med bare $K = 2$ lineære elementer.
Formuler det diskrete problemet.
Hva er dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h?
Anta at vi bruker en standard, nodal basis. Skisser basisfunksjonene til X_h.

Fasit: Vi definerer det diskrete underrommet $X_h \subset X$ som består av alle funksjoner som er lineære over hvert element T_h^k, $k = 1, ..., K$, kontinuerlige over Ω, og som tilfredstiller den essensielle, homogene grensebetingelsen i $x = 1$. Matematisk kan vi uttrykke dette som

$$X_h = \{v \in X \quad | \quad v_{|T_h^k} \in I\!P_1(T_h^k),\ k = 1, ..., K\}$$

Det diskrete problemet kan da skrives som: Finn $u_h \in X_h \subset X$ slik at

$$a(u_h, v) = l(v) \qquad\qquad \forall v \in X_h$$

Dette gir en konform metode (Galerkin).

Dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h er lik 2.

Basisfunksjonene er skissert nedenfor.

f) Generer det algebraiske ligningssystemet for de ukjente basiskoeffisientene.
Du kan velge selv om du vil bruke ett-punkts Gauss-kvadratur eller "integrasjon ved interpolasjon" for å beregne høyresiden.
Finn alle basiskoeffisientene.

Fasit: Bidraget til stivhetsmatrisa fra et element er gitt som elementmatrisa

$$\underline{A}^k = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi assemblerer bidragene fra de 2 elementene og finner at den globale stivhetsmatrisa er

$$\underline{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bruk av enpunkts Gausskvadratur for bidraget fra f gir et elementbidrag

$$\underline{F}^k = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$$

og den globale høyresida blir dermed

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} h - 1 \\ 2h \end{pmatrix}$$

der vi også har tatt hensyn til Neumann grensebetingelsen i $x = 0$. Siden $K = 2$ er $h = 1/2$. Dette gir oss til slutt det algebraiske systemet

$$2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{h1} \\ u_{h2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

med løsning

$$\begin{pmatrix} u_{h1} \\ u_{h2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

g) Sammenlign den numeriske løsningen $u_h(x)$ med den eksakte løsningen $u(x)$. Hva er feilen $e(x) = u(x) - u_h(x)$ i nodepunktene?

Fasit: Den numeriske løsningen er $u_h(x) = u_{h1} \cdot \phi_1(x) + u_{h2} \cdot \phi_2(x) = 1/4 \cdot \phi_2(x)$. Den eksakte løsningen i nodepunktene er: $u(0) = 0$, $u(1/2) = 1/4$ og $u(1) = 0$. Feilen i nodepunktene er dermed lik null. Dette er som forventet siden dette er et endimensjonalt problem og vi integrerer den bilineære og den lineære formen eksakt (for den gitte høyresiden).

h) Tilfredstiller den diskrete løsningen $u_h(x)$ grensebetingelsene eksakt?

Fasit: Nei, $\frac{du_h}{dx}(0) = 1/4 \cdot \phi_2'(0) = 1/2$, mens $\frac{du}{dx}(1) = 1$. Siden elementmetoden er basert på den svake formuleringen, er generelt sett de naturlige grensebetingelsene ikke tilfredstillt eksakt. Grensebetingelsen i $x = 1$ er tilfredstilt eksakt siden dette er en essensiell grensebetingelse og dermed eksakt representert med den valgte basisen for X_h (per konstruksjon).

i) Betrakt på nytt Poisson-ligningen (1), men nå med grensebetingelsene

$$u_x(0) = 1 \tag{5}$$

$$-u_x(1) = u(1)\ . \tag{6}$$

Utled en svak formulering av det nye problemet (tilsvarende punkt b)).

Fasit: Som i punkt b) multipliserer vi (1) med en testfunksjon v og integrerer over Ω:

$$-\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\, v(x)\, dx = \int_0^1 2\, v(x)\, dx$$

Delvis integrasjon gir så:

$$\left[-\frac{du}{dx}(x)\, v(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^1 2\, v(x)\, dx$$

Innsetting av grensebetingelsene $u_x(0) = 1$ og $-u_x(1) = u(1)$ gir:

$$u(1)\, v(1) + v(0) + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^1 2\, v(x)\, dx$$

Den svake formuleringa kan derfor skrives på formen: Finn $u(x) \in X$ slik at

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X$$

der

$$
\begin{aligned}
X &= H^1(\Omega) \\
a(w,v) &= \int_0^1 \frac{dw}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx \;+\; w(1)v(1) \\
l(v) &= \int_0^1 2\,v(x)\,dx \;-\; v(0)\ .
\end{aligned}
$$

j) Vi velger elementmetoden for å løse det nye Poisson-problemet.
Vi bruker $K = 2$ lineære elementer som tidligere.
Formuler det diskrete problemet.
Hva er dimensjonen på det diskrete løsningsrommet X_h? Skisser basisfunksjonene.

Fasit: Vi definerer det diskrete underrommet $X_h \subset X$ som består av alle funksjoner som er lineære over hvert element T_h^k, $k = 1, ..., K$, og er kontinuerlige over Ω. Dette problemet har ingen essensielle grensebetingelser. Matematisk kan vi uttrykke dette som

$$X_h = \{v \in H^1(\Omega) \;\;|\;\; v_{|T_h^k} \in I\!P_1(T_h^k),\; k = 1, ..., K\}$$

Det diskrete problemet kan da skrives som: Finn $u_h \in X_h \subset X$ slik at

$$a(u_h, v) = l(v) \qquad\qquad \forall v \in X_h$$

Dette gir en konform metode (Galerkin).

Dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h er lik 3.

Basisfunksjonene er skissert nedenfor.

k) Er den diskrete løsningen entydig?

Fasit: Ja. Dette følger dersom vi kan vise at den bilineære formen er SPD. Vi ser lett at $a(w, v) = a(v, w)$ for alle $v, w \in X$, dvs a er symmetrisk. Videre har vi at, $\forall w \in X = H^1(\Omega)$, $w \neq 0$,

$$a(w, w) = \int_0^1 w_x^2\,dx \;+\; w(1)^2 \;>\; 0,$$

dvs a er positiv definitt. Hvis $w(1) \neq 0$, kan potensielt det første bidraget på høyresida være lik null (w er en konstant ulik null). Hvis $w(1) = 0$ må w_x være ulik null over deler av Ω, ellers vil w være identisk lik null, noe som stider mot forutsetningene. For alle $w \in X$, $w \neq 0$ er $a(w, w) > 0$, dvs a er positiv definitt. Entydighet følger fra dette.

Oppgave 2

Betrakt konveksjons-diffusjons-problemet:

$$
\begin{aligned}
-\kappa\, u_{xx} + U\, u_x &= f \quad \text{i} \quad \Omega = (0,1) \ , && (7)\\
u(0) &= 0 \ , && (8)\\
u(1) &= 0 \ , && (9)
\end{aligned}
$$

der κ er en konstant, positiv diffusjonskoeffisient og U er en konstant konveksjonshastighet.

a) Utled en svak formulering av problemet (7)-(9) på formen: Finn $u \in X$ slik at

$$b(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X$$

Identifiser spesielt X, b og l for dette problemet.

Fasit: Vi multipliserer (7) med en testfunksjon v og integrerer over Ω:

$$\int_0^1 [\,-\kappa\ u_{xx}(x) + U\, u_x(x)]\ v(x)\ dx = \int_0^1\ f(x)\, v(x)\ dx$$

Delvis integrasjon gir så:

$$[\,-\kappa\, u_x x(x)\, v(x)\ ]_0^1 \ + \ \int_0^1\ (\kappa\, u_x v_x + U\, u_x v)\ dx = \int_0^1\ f\ v\ dx$$

Innsetting av grensebetingelsene $u(0) = u(1) = 0$ gir:

$$\int_0^1\ (\kappa\, u_x v_x + U\, u_x v)\ dx = \int_0^1\ f\ v\ dx$$

Den svake formuleringa kan derfor skrives på formen: Finn $u(x) \in X$ slik at

$$b(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X$$

der

$$
\begin{aligned}
X &= H_0^1(\Omega)\\
b(w,v) &= \int_0^1\ (\kappa\, u_x v_x + U\, u_x v)\ dx\\
l(v) &= \int_0^1\ f\ v\ dx\ .
\end{aligned}
$$

b) Er den bilineære formen b symmetrisk? Er den positiv definitt?

Fasit: Den bilineære formen b er ikke symmetrisk

$$
\begin{aligned}
\forall\, v, w \in X, \quad b(w,v) &= \int_0^1\ (\kappa\, u_x v_x + U\, u_x v)\ dx\\
&= \int_0^1\ (\kappa\, v_x u_x - U\, v_x u)\ dx\\
&\neq\ b(v,w) \quad \text{for} \quad U \neq 0.
\end{aligned}
$$

Derimot har vi at, $\forall w \in X = H^1_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned} c(w,w) &= \int_0^1 U\, w_x w \; dx \\ &= -\int_0^1 U\, w w_x \; dx \\ &= -c(w,w)\ , \end{aligned}$$

noe som betyr at $c(w,w) = 0$. Dette gir oss at

$$\begin{aligned} b(w,w) &= \int_0^1 (\kappa\, w_x w_x + U\, w_x w)\; dx \\ &= \int_0^1 \kappa\, w_x^2 \; dx \\ &> 0 \quad \forall w \in X, w \neq 0, \end{aligned}$$

dvs at b er positiv definitt siden κ er positiv.

c) Vi er spesielt interessert i å løse dette problemet numerisk med elementmetoden i det tilfellet der $\kappa = 0.01$, $U = 2$ og $f = 1$. Anta at vi bruker et uniformt grid med $K = 200$ lineære elementer. Vil dette være tilstrekkelig god oppløsning til at vi unngår oscillasjoner i den diskrete løsningen?

Fasit: Grid Peclet tallet er gitt som $P_g = hU/\kappa$. Her er $h = 1/K = 1/200 = 0.005$, $U = 2$, $\kappa = 0.01$, noe som gir $P_g = 1$. Siden $P_g < 2$ unngår vi oscillasjoner.

d) Anta at vi velger en standard, nodal basis. Det algebraiske ligningssystemet for de ukjente nodeverdiene kan da skrives på formen

$$\underline{B}_h \underline{u}_h = \underline{F}_h. \tag{10}$$

Hva er $\underline{B}_h$ for problemet betraktet i punkt c)?
Hint: konstruer først elementmatrisa for dette problemet basert på de gitte data.

Fasit: Elementmatrisa for dette problemet er

$$\underline{B}^k = \frac{\kappa}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{U}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

der h er elementlengden. Med de gitte data får vi

$$\underline{B}^k = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Assemblering og bruk av påtrykking av grensebetingelser gir da (f.eks. med $K = 5$)

$$\underline{B}_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

e) Vil du anbefale å løse (10) ved hjelp av konjugerte gradienters metode?

Fasit: Nei. Matrisa $\underline{B}_h$ er ikke SPD, og dermed kan ikke konjugerte gradienters metode brukes.

Oppgave 3

Betrakt den tidsavhengige konveksjonsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0 \quad \text{i} \quad \Omega = (0, L)$$

med den periodiske grensebetingelsen

$$u(0,t) \;=\; u(L,t)$$

og initialbetingelsen

$$u(x, t=0) \;=\; u^0(x) \;\; .$$

Hvis vi approksimerer dette problemet i rom ved bruk av K lineære elementer, ender vi opp med et system av ordinære differensialligninger på formen

$$\underline{M}_h \, \frac{d\underline{u}_h}{dt} + \underline{C}_h \, \underline{u}_h \;=\; \underline{0} \;\; , \tag{11}$$

der $\underline{M}_h$ er massematrisa og $\underline{C}_h$ er den diskrete konveksjonsoperatoren.

Anta videre at vi diskretiserer (11) i tid ved hjelp av en tredje ordens Adams-Bashforth metode. Vi velger et konstant tidssteg Δt slik at Courant tallet $C = 0.2$.

a) La T være tida det tar for initialbetingelsen å forplante seg en gang gjennom Ω. Vi sier også at løsningen er periodisk med periode T.
Hvor mange tidssteg trengs det for å integrere systemet (11) fremover i tid tilsvarende en hel periode T? Du kan anta at $K = 200$ og $U = 1$.

Fasit: Perioden $T = L/U$. Tidssteget $\Delta t = C\frac{h}{U}$ der $h = L/K$. Antal tidssteg M er dermed $M = T/\Delta t = (1/C) \cdot (L/h) = K/C = 1000$.

b) Vil den numeriske løsningen etter en periode T være lik initialbetingelsen?

Fasit: Nei. På grunn av numerisk dispersjon vil de ulike komponentene (egenfunksjonene) svarende til ulike bølgetall forplante seg med ulik fasehastighet. Dette gir en forvrengning av initialbetingelsen. I tillegg vil AB3 introdusere litt numerisk diffusjon slik at det også vil være litt energilekkasje. Feil vil altså oppstå både pga numerisk dispersjon og numerisk diffusjon.

Lykke til!

Einar M. Rønquist