Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Einar M. Rønquist (73593547)

EKSAMEN I FAG SIF5050
NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER VED HJELP AV ELEMENTMETODEN

Onsdag 29. mai 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:	Godkjent lommekalkulator tillatt.
	Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Sensur:	Sensuren vil foreligge i uke 27.

Oppgave 1

Betrakt problemet:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right) \frac{du}{dx} \right) &= 0 \quad i \quad \Omega = (0,1) & (1) \\ u(0) &= 0 & (2) \\ u_x(1) &= 1\ . & (3) \end{aligned}$$

Dette problemet tilsvarer stasjonær varmeledning i et materiale som har en varierende varmeledingsevne $\kappa(x) = \frac{1+x}{2}$, og der det ikke er noe kildeledd ($f = 0$).

a) Finn den eksakte løsningen $u(x)$ av problemet (1)-(3). Hva er u(1)?

b) Utled en svak formulering av problemet (1)-(3) på formen: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{4}$$

Identifiser spesielt X, a og l for dette problemet. Hint: multipliser (1) med en testfunksjon $v(x)$, integrer over Ω, foreta delvis integrasjon, og bruk grensebetingelsene.

c) Er den bilineære formen a symmetrisk? Vis at, for alle funksjoner $w \in X$, $w \neq 0$,

$$a(w,w) \;\geq\; \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2\,dx \;>\; 0.$$

d) Finnes det en minimaliseringsformulering svarende til (4)? I så fall, beskriv denne.

e) Anta at vi vil bruke elementmetoden til å løse (4) numerisk. Anta videre at vi bruker et uniformt grid med K lineære elementer. Formuler det diskrete problemet.
Hva er dimensjonen til det diskrete løsningsrommet X_h?
Skisser basisfunksjonene til X_h.

f) Er den diskrete løsningen $u_h(x)$ kontinuerlig over Ω for $K > 1$?
Er den deriverte av $u_h(x)$ kontinuerlig over Ω for $K > 1$?

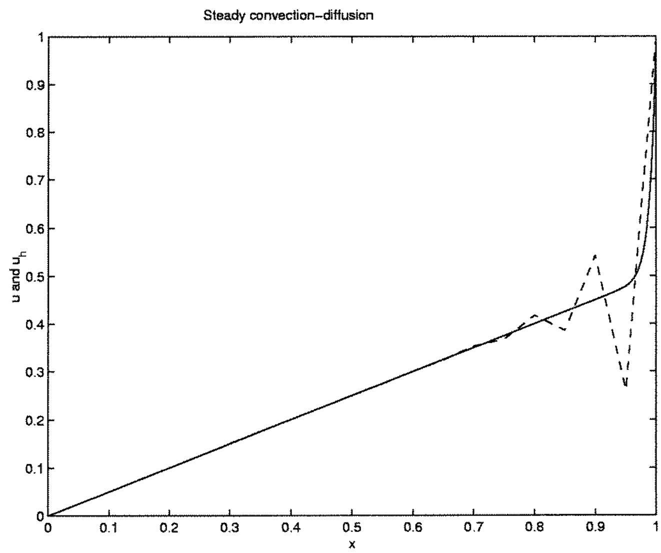
g) Vis at den diskrete løsningen u_h er entydig.

h) Ved å velge en nodal basis for det diskrete løsningsrommet X_h, ender vi opp med et lineært ligningssystem $\underline{A}_h\,\underline{u}_h = \underline{F}_h$ som vi må løse for de ukjente basiskoeffisientene $\underline{u}_h$. Anta at du har valget mellom å bruke konjugerte gradienters metode og en tri-diagonal ligningsløser basert på LU-faktorisering. Hvilken metode vil du anbefale for dette en-dimenjonale, stasjonære varmeledningsproblemet?

i) Anta at vi bare bruker *ett* lineært element over Ω, dvs, $K = 1$.
Hva er dimensjonen til det diskrete rommet $X_h \subset X$ i dette tilfellet?
Skisser alle basisfunksjonene til X_h.

j) Finn eksplisitt den diskrete løsningen $u_h(x)$ med ett lineært element.
Bruk eksakt integrasjon ved utregning av den bilinære og den lineære formen.
Hva er $u_h(1)$? Hvor stor er feilen $u(1) - u_h(1)$?

k) Tilfredstiller $u_h(x)$ den naturlige grensebetingelsen i punktet $x = 1$ eksakt?



Figur 1: En sammenligning mellom den eksakte løsningen u (heltrukken linje) og den standard elementløsningen u_h (stiplet linje) i det tilfellet at vi bruker et uniformt grid med $K = 20$ lineære elementer.

Oppgave 2

Betrakt konveksjons-diffusjons-problemet:

$$
\begin{aligned}
-\kappa\, u_{xx} + U\, u_x &= f \quad i \quad \Omega = (0,1) \ , && (5)\\
u(0) &= 0 \ , && (6)\\
u(1) &= 1 \ , && (7)
\end{aligned}
$$

der κ er en konstant diffusjonskoeffisient og U er en konstant konveksjonshastighet.

Vi er spesielt interessert i å løse dette problemet numerisk med elementmetoden i det tilfellet der $\kappa = 0.01$, $U = 1$ og $f = 0.5$. Figur 1 sammenligner den eksakte og den diskrete løsningen ved bruk av $K = 20$ like elementer.

a) Hva er grid Peclet tallet assosiert med elementløsningen i Figur 1?

b) Hvor mange elementer må vi bruke for å unngå oscillasjoner hvis vi insisterer på å bruke et uniformt grid?

c) Kan vi forbedre den numeriske løsningen basert på lineære elementer (see Figur 1) uten å øke antall frihetsgrader, dvs, uten å øke antall elementer?

Oppgave 3

Betrakt det tidsavhengige konveksjonsproblemet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad i \quad \Omega = (0, L) \\ u(0,t) &= u(L,t) \\ u(x, t=0) &= u^0(x) \ . \end{aligned}$$

Hvis vi bruker K lineære elementer, ender vi opp med et system av ordinære differensialligninger på formen

$$\underline{M}_h \frac{d\underline{u}_h}{dt} + \underline{C}_h \, \underline{u}_h = \underline{0} \tag{8}$$

der $\underline{M}_h$ er massematrisa, og $\underline{C}_h$ er den diskrete konveksjonsoperatoren.

a) Vis at massematrisa $\underline{M}_h$ er symmetrisk og positiv definitt.

b) Vis at matrisa $\underline{C}_h$ er skeiv-symmetrisk (eller anti-symmetrisk) for de gitte periodiske grensebetingelsene.

c) Vil du anbefale å bruke forlengs Euler som tidsintegrasjonsmetode for (8)?

d) Anta at vi har en tidsintegrasjonsmetode som kan integrere (8) eksakt, og at vi bruker denne metoden til å integrere (8) fra $t = 0$ til tida $t = T > 0$.
Vil vi ha numerisk dispersjon i dette tilfellet?

Lykke til!

Einar M. Rønquist